PSI
MATHEMATIQUES
Avril 2024

Feuille d'Exercices
Calcul différentiel
CORRECTION

Exercice 1. CCINP PSI 2021

1. $\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$ ou $(1,1)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x,0) = x^3 < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x,0) > 0$. On en déduit que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.
3. $g(u,v) = 3u^2 + 3v^2 - 3uv + u^3 + v^3$ puis $g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2(1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + r(\cos^3\theta + \sin^3\theta))$.
4. $1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \geqslant \frac{1}{2}$ et $\cos^3\theta + \sin^3\theta \geqslant -2$ donc $g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2(\frac{1}{2} - 2r)$.
   Lorsque $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{4}$, $g(u,v) \geqslant 0$ donc f admet un minimum local en $(1,1)$.
5. Global implique local donc le seul extremum possible est en $(1,1)$ et c'est un minimum. Mais $f(-2,0) = -8 < -1 = f(1,1)$ donc f n'admet pas d'extremum global.
   Ou encore, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$ donc f n'est ni minorée ni majorée.

Exercice 2. CCINP MP 2023
On définit la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$

6. Établir que $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$
   La fonction $d : x \mapsto e^{-x} - x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $d' : x \mapsto -e^{-x} - 1$ est négative sur $\mathbb{R}$.
   d est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, comme $d(0) = 1$ et $d(1) = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$ car $e > 1$, on en conclut par le théorème des valeurs intermédiaires que $d(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, cette solution est un élément de $]0,1[$, on la note α.
7. Démontrer que f admet un unique point critique (x_0, y_0) sur $\mathbb{R}^2$
   f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et on cherche donc à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} & = 0 \\ -2x + 4y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - e^{-x} & = 0 \\ x & = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \alpha \\ y & = 2\alpha \end{cases}$$

   f admet donc un unique point critique $A(\alpha, 2\alpha)$ sur $\mathbb{R}^2$.
8. A l'aide de la matrice Hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0, y_0).
   La matrice Hessienne de f en A est $H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 + e^{-\alpha} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, son déterminant est strictement positif $(4+4e^{-\alpha})$ et sa trace est positive, les deux valeurs propres de la matrice sont strictement positives, c'est donc une matrice symétrique de $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$
   et donc $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad (h,k)H_f(A)\binom{k}{h} > 0$,
   A l'aide du développement limité à l'ordre 2 de f en A, on peut dire que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\alpha + h, 2\alpha + k) = f(\alpha, 2\alpha) + 0 + \frac{1}{2}(h,k)H_f(A)\begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix} + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(\|(h,k)\|^2)$$

   C'est à dire que sur un voisinage de A, $f(\alpha + h, 2\alpha + k) - f(A) > 0$, ce qui signifie que l'on a en A un minimum local.

Exercice 3. CCINP MP 2021

1. La dérivée seconde de ln est la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$, elle est de signe négatif donc ln est concave sur $]0, +\infty[$.
   Soit $(a,b,c) \in]0, +\infty[^3$, l'inégalité de concavité donne :

$$\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln\left((abc)^{\frac{1}{3}}\right)$$

donc

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x;y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

2. — Point critique :

   f est de classe $\mathcal{C}^1$sur $]0,+\infty[^2$et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \dfrac{1}{x^2y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \dfrac{1}{xy^2}$.

   (x,y) est un point critique de f sur $]0,+\infty[^2$ si et seulement si : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, donc :

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2y} = 0 \\ 1 - \frac{1}{xy^2} = 0 \end{cases}$$

   qui donne

$$\begin{cases} x = y = \dfrac{1}{xy} \end{cases}$$

   ainsi $x = y = 1$. Le point $(1,1)$ est l'unique point critique de f sur $]0,+\infty[^2$.

   — Nature du point critique :

   L'inégalité de la question précédente appliquée pour $a = x$, $b = y$ et $c = \frac{1}{xy}$, donne

$$\sqrt[3]{abc} = 1 \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}f(x,y)$$

   On en déduit : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$ $f(x,y) \geq f(1,1) = 3$ donc $(1,1)$ est un minimum global .

Exercice 4. ATS 2019

1. $\mathscr{D}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$. $\mathscr{D}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
2. — $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ donc f est continue sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$;

   — $\mathscr{D}$ est bornée car $\mathscr{D}$ est inclus dans le carré de sommets $(-2,-2)$, $(2,-2)$, $(2,2)$ et $(-2,2)$:

   $(x,y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| \leq 2 \\ |x-y| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x+y \leq 2 \\ -2 \leq x-y \leq 2 \end{cases}$

   Donc

   $(x,y) \in \mathscr{D} \implies \begin{cases} -4 \leq 2x \leq 4 \\ -4 \leq 2y \leq 4 \end{cases}$

   puis

   $(x,y) \in \mathscr{D} \implies \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$

   En conclusion, $\mathscr{D}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent f est bornée sur $\mathscr{D}$ et atteint ses bornes sur $\mathscr{D}$.
3. **Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'ensemble $\mathscr{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par**

$$\mathscr{O} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| < 2 \text{ et } |x-y| < 2\right\}.$$

   (a) Les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur $\mathscr{O}$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$ et nous pouvons déterminer le gradient de f en tout point (x,y) de $\mathscr{O}$.

   Calculons les dérivées partielles de f par rapport à ses deux variables :

   — $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1} - 1$;

   — $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$.

   Donc $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1} - 1; \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)$.

   (b) Soit (x,y) est un point critique de f alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x^2+y^2+1} - 1 = 0 \\ \frac{2y}{x^2+y^2+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

   donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

(c) Nous allons utiliser le théorème de Schwarz :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\forall a \in U, \quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_i}(a).$$

Ici les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues sur $\mathscr{O}$ donc f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{O}$. Le théorème de Schwarz s'applique et nous avons en particulier $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

(d)

$$\begin{cases} r(x,y) = \frac{2(-x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} \\ s(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ t(x,y) = \frac{2(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} \end{cases}$$

(e) Nous avons $r(1,0) = 0$, $s(1,0) = 0$, $t(1,0) = 1$ et donc $(rt - s^2)(1,0) = 0$.
Le déterminant de la matrice Hessienne est nul et par conséquent il n'est pas possible à ce stade de conclure sur la nature du point critique $(1,0)$.

(f) $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o_0(u^3)$.

(g)

$$\begin{array}{rcl} f(1+t,0) - f(1,0) & = & \ln((1+t)^2+1) - (1+t) - \ln(1^2+1) + 1 \\ & = & \ln(2+2t+t^2) - t - \ln(2) \\ & = & \ln\left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right) - t \\ & = & \left(t+\frac{1}{2}t^2\right) - \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)^2 + \frac{1}{3}\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)^3 + o_0(t^3) \\ f(1+t,0) - f(1,0) & = & -\frac{1}{6}t^3 + o_0(t^3) \end{array}$$

Si $(1,0)$ est un extremum local de f, alors la fonction $t \mapsto f(1+t,0)$ admet un extremum local en $t=0$. Or $f(1+t,0) = f(1,0) - \frac{t^3}{6} + o_0(t^3)$ est monotone sur voisinage de $t=0$. Il y a contradiction et $(1,0)$ n'est pas un extremum de f.

Exercice 5. Cf sujets et corrections sur le cloud répertoire TD