Exercice 9 ✰✰✰✰

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

1. (a) Soient $a \in \bar{A}$ et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim a_n = a$, et $b \in \bar{A}$ et $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim b_n = b$
   Montrer que pour tout scalaire $\lambda \in [0,1]$, $\lambda a + (1-\lambda)b \in \bar{A}$

   (b) En déduire que $\bar{A}$ est convexe.

Notes

[9] correction exo 9.1 :

1. (a) Soient $a \in \bar{A}$ et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim a_n = a$, et $b \in \bar{A}$ et $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim b_n = b$
   Montrer que pour tout scalaire $\lambda \in [0,1]$, $\lambda a + (1-\lambda)b \in \bar{A}$
   Comme $0 \leq \|[\lambda a + (1-\lambda)b] - [\lambda a_n + (1-\lambda)b_n]\| \leq |\lambda| \|a - a_n\| + |1-\lambda| \|b - b_n\|$, par encadrement de limites, on a $0 = \lim_n \|[\lambda a + (1-\lambda)b] - [\lambda a_n + (1-\lambda)b_n]\|$, donc la suite $(z_n) = (\lambda a_n + (1-\lambda)b_n)$ de points de E converge vers la limite $z = \lambda a + (1-\lambda)b$.
   Comme A est convexe, ce sont des points de $z_n \in A$, donc la limite $z = \lambda a + (1-\lambda)b$ appartient à $\overline{A}$.

   (b) Ce pour tous $a, b \in \overline{A}$, et tout $\lambda \in [0,1]$, ainsi $\overline{A}$ est convexe.