Exercice 7 ☆

On note S la somme de deux dés équilibrés.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires D_1 et D_2 représentant les résultats respectifs des deux dés.
2. Déterminer la loi de S.
3. Déterminer l'espérance de S.
4. Déterminer la variance de S.

Exercice 10 ☆☆☆ *CCINP PSI*

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$, $p, q \in]0,1[$, avec $p+q=1$. Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telles que $\forall (j,k) \in [\![0,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, $P(X=j, Y=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k = j \neq 0 \\ \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$

1. Lois de X et Y ? Calculer l'espérance de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=j)$.
4. Calculer la covariance de X, Y. Existe-t-il des valeurs de q telles que X et Y soient décorrélées ?

Notes

[7] correction exo 7 :

1. D_1 et D_2 sont indépendantes, de loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$
2. S est à valeurs dans $S(\Omega)=[\![2,12]\!]$.

   A l'aide d'un tableau double entrée, on calcule $S(i,j)=i+j$ en fontion de $i,j\in[\![1,6]\!]$, pour trouver c'est à dire $\mathbf{P}[S=2]=\mathbf{P}[S=12]=\dfrac{1}{36}$, $\mathbf{P}[S=3]=\mathbf{P}[S=11]=\dfrac{1}{18}$ $\mathbf{P}[S=4]=\mathbf{P}[S=8]=\dfrac{1}{12}$, $\mathbf{P}[S=5]=\mathbf{P}[S=9]=\dfrac{1}{9}$, $\mathbf{P}[S=6]=\mathbf{P}[S=8]=\dfrac{5}{36}$, $\mathbf{P}[S=7]=\dfrac{1}{6}$.

   ou encore $\mathbf{P}[S=k]=\dfrac{6-|7-k|}{36}$.
3. $\mathbf{E}[S]=\dfrac{2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6+8\times5+9\times4+10\times3+11\times2+12\times1}{36}$
4. Par transfert,$\mathbf{E}[S^2]=\dfrac{2^2\times1+3^2\times2+4^2\times3+5^2\times4+6^2\times5+7^2\times6+8^2\times5+9^2\times4+10^2\times3+11^2\times2+12^2\times1}{36}$,

   puis $\mathbf{V}[S]=\mathbf{E}[S^2]-(\mathbf{E}[S])^2$

---

[10] correction exo 10 :

1. $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$, $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$

   Si $j\geq 1$, $P[X=j]=P[X=j,Y=j]=\binom{n}{j}p^jq^{n-j}$

   Si $j=0$, $P[X=0]=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P[X=0,Y=k]=\sum q^n/n=q^n$

   Si $1\leq k\leq n$, $P[Y=k]=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}+\dfrac{q^n}{n}$

   car $P[Y=k]=\displaystyle\sum_{0\leq j\leq n}P[X=j,Y=k]$

   $P[Y=k]=P[X=0,Y=k]+P[X=k,Y=k]$

   $E[Y]=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kP[Y=k]$

   $=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kp^kq^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}k\frac{q^n}{n}=np+q^n(n-1)/2$
2. $P[(X,Y)=(0,1)]=q^n/n\neq P[X=0]\times P[Y=1]=q^n/n\times(q^n/n+\binom{n}{1}pq^{n-1})$
