Exercice 10 ☆☆☆ *CCINP PSI*

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$, $p, q \in]0,1[$, avec $p+q=1$. Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telles que $\forall (j,k) \in [\![0,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, $\quad P(X=j, Y=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k=j\neq 0 \\ \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } k\neq j \text{ et } j\neq 0 \end{cases}$

1. Lois de X et Y ? Calculer l'espérance de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=j)$.
4. Calculer la covariance de X, Y. Existe-t-il des valeurs de q telles que X et Y soient décorrélées ?

Exercice 11 ☆☆

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 ☆☆☆

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathbf{P}\left(X=j, Y=k\right) = \frac{a}{2^{j+1}\, k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.
b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.
c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Notes

[10] correction exo 10 :

1. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$
   Si $j \geq 1$, $P[X = j] = P[X = j, Y = j] = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$
   Si $j = 0$, $P[X = 0] = \sum_{k=1}^{n} P[X = 0, Y = k] = \sum q^n/n = q^n$
   Si $1 \leq k \leq n$, $P[Y = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n}$
   car $P[Y = k] = \sum_{0 \leq j \leq n} P[X = j, Y = k]$
   $P[Y = k] = P[X = 0, Y = k] + P[X = k, Y = k]$
   $E[Y] = \sum_{k=1}^{n} kP[Y = k] = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=0}^{n} P[Y = k, X = j] = \sum_{k=1}^{n} k([Y = k, X = k] + P[Y = k, X = 0])$
   $= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kp^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{q^n}{n} = np + q^n(n-1)/2$
2. $P[(X, Y) = (0, 1)] = q^n/n \neq P[X = 0] \times P[Y = 1] = q^n/n \times (q^n/n + \binom{n}{1} pq^{n-1})$
   X et Y ne sont pas indépendantes
3. Pour j fixé, $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbf{P}_{\{X=j\}}(Y = k) = \frac{\mathbf{P}(\{X = j\} \cap \{Y = k\})}{\mathbf{P}(\{X = j\})}$
   Si $j \geq 1$,
   On trouve $\mathbf{P}_{\{X=j\}}(Y = k) = 0$ si $k \neq j$, et si $k = j$, on trouve $\frac{\mathbf{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\})}{\mathbf{P}(\{X = k\})} = 1$
   Si $j = 0$,
   On trouve $\mathbf{P}_{\{X=j\}}(Y = k) = \frac{1}{n}$.
4. $E[Y] = np + q^n(n-1)/2$ a été calculée.
   $E[X] = \sum_{j=0}^{n} jP[X = j] = \sum_{j=1}^{n} jP[X = j] = \sum_{j=1}^{n} j \sum_{k=1}^{n} P[X = j, Y = k] = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} p^j q^{n-j} = np$ en reconnaissant l'espérance de la loi binomiale.
   Par Transfert pour $f : (x, y) \mapsto xy$:
   $E[XY] = \sum_{j,k} jkP[X = j, Y = k] = 0q^n/n + \sum_{j=1}^{n} j^2 \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = E(Z^2) = V(Z) + (E[Z])^2 = np(1-p) + (np)^2 = nq(1-q) + n^2(1-q)^2$
   si $Z \hookrightarrow B(n, p)$
   D'où $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = [nq(1-q) + n^2(1-q)^2] - (np) \times (np + q^n(n-1)/2) = [nq(1-q) + n^2(1-q)^2] - (n(1-q)) \times (n(1-q) + q^n(n-1)/2) = h(q)$
   On cherche une valeur de q pour laquelle $Cov(X, Y) = 0$. On étudie les variations de h pour savoir si $h(q) = Cov(X, Y)$ peut s'annuler... (Q4 est technique !)

---

[11] correction exo 11 :

1. X et Y sont à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, donc $(X, Y)(\Omega) = [\![1, n]\!]^2$.
   $\mathbf{P}[(X, Y) = (i, j)] = 0$ si $j > i$.
   $\mathbf{P}[(X, Y) = (i, j)] = \mathbf{P}[X = i] \times \mathbf{P}_{\{X=i\}}[Y = j] = \frac{1}{n}\frac{1}{i}$ si $1 \leq j \leq i \leq n$.
2. $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=1} \mathbf{P}[(X, Y) = (k, k)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
3. On a, par probas totales pour le s.c.e. $([X = i])_{1 \leq i \leq n}$,
   $\mathbf{P}[Y = j] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}[X = i]\mathbf{P}_{\{X=i\}}[Y = j] = \sum_{i=j}^{n} \mathbf{P}[X = i]\mathbf{P}_{\{X=i\}}[Y = j] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{ni} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.
   X et Y ne sont pas indépendantes car pour $j > i$, $\mathbf{P}[(X, Y) = (i, j)] = 0 \neq \frac{1}{n}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}) = \mathbf{P}[X = i] \times \mathbf{P}[Y = j]$.

---

[12] correction exo 12 :

a) Comme $1 = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{j+1}\ k!} = a\mathrm{e}^1 \frac{1/2}{1-1/2} = a\mathrm{e}$, on a $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

b) En utilisant une réunion d'incompatibles, $\mathbf{P}\left(X=j\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X=j, Y=k\right) = \frac{a\mathrm{e}}{2^{j+1}} = \frac{1}{2^{j+1}}$, donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$.

$\mathbf{P}\left(Y=k\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X=j, Y=k\right) = \frac{\mathrm{e}^{-1}1^k}{k!}$, donc $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.

c) X et Y sont indépendantes, car pour tous j, k, $\dfrac{a}{2^{j+1}\ k!} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2^{j+1}\ k!} = \dfrac{1}{2^{j+1}} \times \dfrac{\mathrm{e}^{-1}1^k}{k!}$