Exercice 4 ✰✰ *Approximation Binomiale Poisson*

Soit $p \in]0,1[$ fixé.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, vérifier que

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-np}(np)^k}{k!}$$

En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda = np$ que

$$\lim_{n \to +\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Interprétation : La relation $\lambda_n = np$ montre que pour n grand, la probabilités $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ qu'une variable de loi $\mathcal{B}(n,p)$ soit égale à k est très proche de la probabilités $e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ qu'une variable de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ soit égale à k : on dit que la loi de Poisson est la loi des évènements "rares".

Exercice 3 ✰✰ *Sondage*

Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$.
On choisit un échantillon de n personnes et l'on pose $X_i = 1$ si le i-ème individu présente la propriété étudiée, 0 sinon.
On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toute une loi de Bernoulli de paramètre p.
a) Quelle est la loi suivie par

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n\,?$$

b) Déterminer espérance et variance de S_n/n.
c) Soit $\varepsilon > 0$. Etablir

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

d) Pour $\varepsilon = 0,05$, quelle valeur de n choisir pour que S_n/n soit voisin de p à ε près avec une probabilité supérieure à 95 % ?

Exercice 6 ✰✰

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$.
Montrer que :

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}$$

Notes

[4] correction exo 4 :
avec $p = \frac{\lambda}{n}$, c'est à dire $np = \lambda$:

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \frac{i}{n}) \ \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(np)^k}{k!} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \frac{i}{n}) \ \times e^{n \ln(1-np/n)} \ \times e^{-k \ln(1-np/n)} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \times 1 \times e^{-\lambda} \times 1 \quad \square$$

---

[3] correction exo 3 :

a)S_n soit une loi de Bernoulli de paramètres n et p.

b) Puisque S_n suit une loi de Bernoulli, $\mathrm{E}(S_n) = np$ et $\mathrm{V}(S_n) = np(1-p)$.

Par conséquent $\mathrm{E}(S_n/n) = p$ et $\mathrm{V}(S_n/n) = p(1-p)/n$

c) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $P(|Sn/n - \mathrm{E}(Sn/n)| > \varepsilon) \leq \mathrm{V}(Sn/n)/\varepsilon^2$

et donc $P(|Sn/n - p| > \varepsilon) \leq p(1-p)/(n\varepsilon^2)$

Enfin, l'inégalité classique $p(1-p) \leq 1/4$ permet de conclure.

d) On choisit n de sorte que $1/(4n\varepsilon^2) \leq 0,05$

La valeur $n = 2000$ est convenable.

---

[6] correction exo 6 :

On peut remarquer que $f : t \mapsto \mathbb{V}(X + tY) = \mathbb{V}(X) + 2t\mathrm{Cov}(X,Y) + t^2\mathbb{V}(Y)$ est polynomiale de degré 2 et à valeurs positives (car variance).

Donc son discriminant $\Delta = 4\mathrm{Cov}(X,Y)^2 - 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$ est ≥ 0, c'est à dire : $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}$

variante difficile : On utilise directement l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $((u_n),(v_n)) \mapsto \sum_n u_n v_n p_n$, pour obtenir $|\sum x_n y_n p_n| \leq \sqrt{\sum x_n^2 p_n \sum y_n^2 p_n}$, avec $p_n = \mathbf{P}(X,Y) = (x_n, y_n)$
