Exercice 14 ☆☆☆

Soient $Y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.

On considère l'application

$\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (a,b) \mapsto \left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y_0 \right\|_2^2$.

Justifier que δ est admet des dérivées partielles, et calculer les dérivées partielles de δ en (a,b), à l'aide de a, b , C_1, C_2, Y_0 et le produit scalaire $< \mid >$ usuel associé à la norme euclidienne $\| \ \|_2$ sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pourra réécrire $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aC_1 + bC_2$, en notant C_1 et C_2 les colonnes de A.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique réelle, à valeurs propres positives, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $X : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $X' = AX$.
Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur I.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \det(A - tI_n)$
1) Rappeler une formule du cours faisant intervenir $\varphi(t)$, $\det A$ et $\operatorname{tr} A$.
2) Justifier que l'application φ est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

Exercice 6

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ au point $A = (0; 1/2; 0)$.

Notes

[14] correction exo 14 :

$\delta(a,b) = \sum_{i=1}^{n} ()^2$ est polynomiale en (a,b) donc admet des dérivées partielles.

Comme $\delta(a,b) = \left\langle A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - Y_0 | A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - Y_0\right\rangle$.

On a $\frac{\partial}{\partial a}\left(A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - Y_0\right) = A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Par bilinéarité et dérivation, et symétrie du p.s.

$\frac{\partial \delta}{\partial a}(a,b) = 2 < A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - Y_0 | A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} >$

Ainsi $\frac{\partial \delta}{\partial a}(a,b) = 2 < aC_1 + bC_2 - Y_0|C_1 >= a\|C_1\|^2 + b\|C_2\|^2 - < Y_0|C_1 >$.

De même $\frac{\partial \delta}{\partial b}(a,b) = 2 < aC_1 + bC_2 - Y_0|C_1 >= a\|C_1\|^2 + b\|C_2\|^2 - < Y_0|C_2 >$.

---

[14] correction exo 15 : Par théorème spectral, la matrice A symétrique réelle est semblable à $D = (d_1, \dots d_n)$ réelle via une matrice de passage $P \in O_n(\mathbb{R})$, avec $P^T AP = D$.

$f : t \mapsto \|X(t)\|_2^2 =< X(t)|X(t) >$ est dérivable et $f'(t) =< X'(t)|X(t) > + < X(t)|X'(t) >= 2 < X'(t)|X(t) >= 2 < AX(t)|X(t) >$.

Or pour $Z(t) = P^T X(t)$, on a $(AX(t))^T X(t) = (P^T X(t))^T A^T P^T X(t) = Z(t)^T DZ(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i z_i(t)^2 \geq 0$ car les d_i sont positifs, donc $f'(t) \geq 0$, donc f est croissante, à valeurs positives, puis $t \mapsto \sqrt{f(t)}$ est croissante.

---

[15] correction exo 16 :

1) $\varphi(t) = \det A + \cdots + (-1)^n \operatorname{tr} At^{n-1} + t^n$.

2) φ est continue sur $\mathbb{R}$, car polynomiale.

3) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale ! $\varphi(0) = \det(A)$

$\varphi'(0)$ est obtenu en dérivant le terme facteur de t^1, c'est à dire $\sum_{j=1}^{n} \det([C_1, \dots, C_{j-1}, tE_j, C_{j+1}, \dots, C_n])$.

$\varphi'(0) = \sum_{j=1}^{n} \det([C_1, \dots, C_{j-1}, E_j, C_{j+1}, \dots, C_n]) = \sum_{j=1}^{n} A_{jj}$, où A_{jj} est le determinant "rayé" obtenu en enlevant la $j$ème ligne et $j$ème colonne.

---

[6] correction exo 6 :

$0^2 + 4(1/2)^2 + 4 \times 0^2 = 1$, donc A apaprtient à cette surface (ellipsoïde) et le plan tangent à S en A a pour équation cartésienne $\overrightarrow{Grad(f)}(A) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, soit $(x-0) \times 2 \times 0 + (y - 1/2) \times 8 \times 1/2 + (z-0) \times 8 \times 0 = 0$,
i.e. $y = 1/2$
