Exercice 1 ✰✰

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la norme $\| \ \|$ euclidienne usuelle, dessiner la boule fermée de centre $\Omega(1,1,0)$ et de rayon 2.

Exercice 3 ✰✰

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 > y^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 ✰✰

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 = 1 + y\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 ✰✰✰ *Fermé*

Justifier que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); \ \det(M) = 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Notes

[1] correction exo 1 :

$B_f(\Omega, 2) = \{M \in \mathbb{R}^3; \Omega M \leq 2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 4\}$, on dessine une sphère (pleine) dans l'espace de rayon 2.

---

[3] correction exo 3 :

Pour $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ continue, on a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 > y^2\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est ouvert, comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

---

[4] correction exo 4 :

Pour $g : (x, y) \mapsto x^2 - y - 1$ continue, on a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = 1 + y\} = g^{-1}(\{0\})$ est fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

---

[6] correction exo 6 :

Comme $h : M \mapsto \det(M)$ continue, car polynomiale en les coefficients de M, on a $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R});\ \det(M) = 0\} = h^{-1}(\{0\})$ est fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
