Exercice 1 ✰✰✰ *CCINP PC 2018*

On étudie
$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \right\}.$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x,y) \in E$.
2. Montrer que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 ✰✰

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la norme $\|\ \|$ euclidienne usuelle, calculer la distance du point $A(1,-1,1)$ au plan d'équation $x+z=0$.

Exercice 8 ✰✰

Soient F une partie fermée non vide d'un espace normé E et $x \in E$.

On note $d(x,F) = \inf\{\|x-y\|,\ y \in F\}$

1. si $x \in F$, justifier que $d(x,F) = 0$
2. Supposons que $d(x,F) = 0$
   (a) justifier l'existence d'une suite $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x - y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$
   (b) Montrer que la suite y_n est convergente, vers une limite que l'on précisera.
   (c) En utilisant le fait que F est une partie fermée, montrer que $x \in F$.
3. En déduire que
   $$d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

Notes

[1] correction exo 7 :

1. $\chi_m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1) - xy = \lambda^2 - 3\lambda + 2 + xy$.

Le discriminant est $\Delta = 9 - 4(2 - xy) = 1 + 4xy$.

Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes non réelles, la matrices est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur R.

Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes, la matrices est diagonalisable sur R.

Si $\Delta = 0$, $xy = -1/4$, il y a une racine réelle double $\lambda_0 = 3/2$, on regarde le rang de $3/2I_2 - M = \begin{pmatrix} -1/2 & -y \\ x & 1/2 \end{pmatrix}$ Comme x et y non nuls, on a $y = \dfrac{-1}{(4x)}$, soit $3/2I_2 - M = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/(4x) \\ -x & 1/2 \end{pmatrix}$

Les colonnes sont colinéaires ssi $(-1/2)/(1/(4x)) = -x/(1/2)$, ssi $-2x = -2x$, ce qui est vrai.

Donc le rang vaut 1 et M n'est pas diagonalisable.

Conclusion $\boxed{(x, y) \in E \iff 1 + 4xy > 0}$

2. Pour $f : (x, y) \mapsto 1 + 4xy$, polynomiale donc continue, $E = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est ouvert

---

[2] correction exo 2 :

Le plan P est orthogonal à $\overrightarrow{n} = (1, 0, 1)$, vu son équation cartésienne.

Pour $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{n})$, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OA}$ sur D est $\overrightarrow{OM}$, avec $\overrightarrow{OM} = \dfrac{<\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{n}>}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\overrightarrow{n} = \dfrac{2}{2}\overrightarrow{n}$

On obtient $M(1, 0, 1)$.

De sorte que $d(A, P) = AM = 1$ en calculant via les coordonnées cartésiennes.

---

[8] correction exo 8 :

1. Pour $x \in F$, $0 = \|x - x\| \geq \{\|x - y\|,\ y \in F\} \geq 0$, donc $d(x, F) = 0 = \|x - x\|$
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon = \dfrac{2}{n+1} > \dfrac{1}{n+1}$, $B(x, \varepsilon) \cap F \neq 0$ car sinon, $d(x, F) \geq \varepsilon$.

   Donc il existe $y_n \in F$ tel qur $\|x - y_n\| \leq \dfrac{1}{n+1}$

   (b) $0 \leq \|x - y_n\| \leq \dfrac{1}{n+1}$ et par théorème d'encadrements de limites, $\lim_n \|x - y_n\| = 0$, donc (y_n) converge vers x.

   (c) Par caractérisation des fermés par les limites, la suite convergentes (y_n) de points de F converge vers une limite dans F, donc $x \in F$.
3. D'après les parties 1 et 2,

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$
