Exercice 5 ✫✫ *CCINP PC*

Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique c'est-à-dire g est de classe C^2 et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

1) Trouver a, b des réels tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b}{1-t}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = fog$.

3) Exprimer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

4) On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique ssi g est une constante.

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $G(x,y) = h\left(\dfrac{\cos(x)}{\mathrm{ch}(y)}\right)$.

5) Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

---

5)

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}(x,y) = \frac{-\sin x}{\mathrm{ch}\, y} \times h'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\sin^2 x}{\mathrm{ch}^2\, y} \times h''\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}\right) + \frac{-\cos x}{\mathrm{ch}\, y} \times h'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}(x,y) = \frac{-\cos x\,\mathrm{sh}\, y}{\mathrm{ch}^2\, y} \times h'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\cos^2 x\,\mathrm{sh}^2\, y}{\mathrm{ch}^4\, y} \times h''\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}\right) + (-\cos x)\frac{\mathrm{ch}^3\, y - 2\,\mathrm{sh}^2\, y\,\mathrm{ch}\, y}{\mathrm{ch}^4\, y} \times h'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}\right) \qquad (2)$$

Donc $(1) + (2)$:

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y^2}(x,y)$$

$$= \left(\frac{\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2\, y + \cos^2 x\,\mathrm{sh}^2\, y}{\mathrm{ch}^4\, y}\right) \times h''\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}\right) + \left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}\frac{2\,\mathrm{sh}^2\, y\,\mathrm{ch}\, y}{\mathrm{ch}^3\, y}\right) \times h'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}\right)$$

On multiplie par $\mathrm{ch}^2\, y/\,\mathrm{sh}^2\, y$ et on pose $t = \dfrac{\cos x}{\mathrm{ch}\, y}$.

On a $1 - t^2 = 1 - \dfrac{\cos^2 x}{\mathrm{ch}^2\, y} = \dfrac{\mathrm{ch}^2\, y - \cos^2 x}{\mathrm{ch}^2\, y} = \dfrac{\mathrm{ch}^2\, y(\cos^2 x + \sin^2 x) - \cos^2 x(\mathrm{ch}^2\, y - \mathrm{sh}^2\, y))}{\mathrm{ch}^2\, y}$

on obtient donc :

$$(1-t^2)h''(t) + 2th'(t) = 0$$

Que l'on résout evia Q2 (analogue) : il existe α, tel que $\forall t \in]-1,1[,\ y(t) = \dfrac{\alpha}{1-t^2}$

C'est à dire il existe α, tel que $G : (x,y) \mapsto \dfrac{\alpha}{1 - \dfrac{\cos^2 x}{\mathrm{ch}^2\, y}}$