Corrigé du DS3 de mathématiques, proposé le 23/11/2019

Exercice n° 1

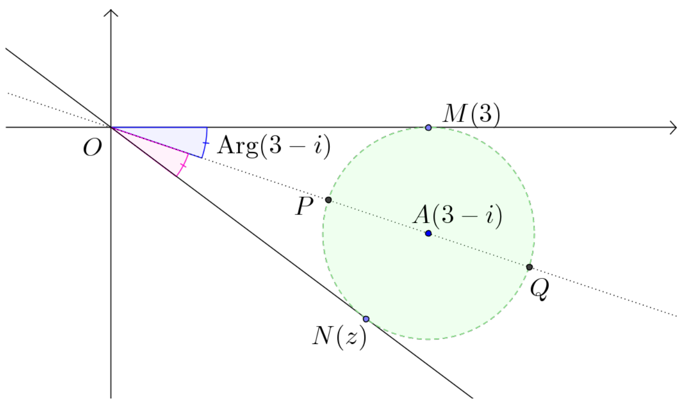
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{32i} = \frac{2i\sin 5x - 10i\sin 3x + 20i\sin x}{32i}$.
   Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^5 x = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x}$.

2. $(E) : y'' + 4y = 1$ est une équation différentielle du second ordre, linéaire à coefficients constants.
   Son équation caractéristique est $(E_c) : r^2+4=0$; ses solutions sont $2i$ et $-2i$. On en déduit que la solution de l'équation homogène $y''+4y=0$ est $\mathrm{Vect}(x \mapsto \cos 2x\ ;\ x \mapsto \sin 2x)$.
   On observe que la fonction constante $x \mapsto \frac{1}{4}$ est solution de l'équation.
   La solution générale de (E) est donc $\mathcal{S}_E = \left\{x \mapsto \lambda\cos 2x + \mu \sin 2x + \frac{1}{4} / (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   Un élément de $\mathcal{S}_E$ vérifie $\left\{\begin{array}{l} y(0)=2 \\ y'(0)=5 \end{array}\right.$ si, et seulement si, $\left\{\begin{array}{l} \lambda+\frac{1}{4}=2 \\ 2\mu=5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda=\frac{7}{4} \\ \mu=\frac{5}{2} \end{array}\right.$.
   Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution est la fonction } x \mapsto \frac{7}{4}\cos 2x + \frac{5}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}}$.

3. La suite u est arithmético-géométrique.
   Le point fixe de $x \mapsto 2x+5$ est $r=-5$, la suite $u-r=u+5$ est donc géométrique de raison 2, c'est-à-dire qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n+5=(u_0+5)2^n \iff u_n = 8\times 2^n - 5 \iff u_n = 2^{n+3}-5$.
   On en déduit que $\boxed{u_{2019} = 2^{2022}-5}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} 2^{i-1} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{j} 2^{i-1}}_{(\star)}$.
   La somme $(\star)$ est une somme géométrique qui vaut $\frac{1-2^j}{1-2} = 2^j-1$, on a donc :
   $$\sum_{1\le i\le j\le n} 2^{i-1} = \sum_{j=1}^{n}(2^j-1) = \left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) - n = 2\times \underbrace{\sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}}_{(\star)} - n = 2(2^n-1)-n = \boxed{2^{n+1}-2-n}.$$

5. Dans le plan complexe, Λ correspond à l'intérieur du disque de centre $3-i$ et de rayon 1.
   On construit une figure pour illustrer la situation :



   Le module d'un élément de Λ est compris entre les distances $O=P$ et OQ donc dans l'intervalle $]\rho-1;\rho+1[$ avec $\rho = OA = |3-i| = \sqrt{10}$.
   On observe que l'argument principal des éléments de Λ est compris entre les arguments des affixes de N et M, soit dans l'intervalle $]2\mathrm{Arg}(3-i);0[=]-2\mathrm{Arcos}\frac{3}{\sqrt{10}};0[$.

Problème

Partie A : Intégrales de Wallis

1. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} - W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(\sin x - 1) \, \mathrm{d}x$. Or, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq 0$ et $\sin x - 1 \leq 0$.
   Par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le « bon sens ») on a $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} - W_n \leq 0$, c'est-à-dire que $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

3. $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[,\ \sin x > 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N},\ W_n > 0$ (encore par positivité de l'intégrale).
   $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée donc convergente vers un réel } \ell \geq 0}$.

4. Soit n un entier naturel. On a : $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n+1} x \, \mathrm{d}x$.
   On pose $\begin{cases} u' = \sin x \\ v = \sin^{n+1} x \end{cases}$ et $\begin{cases} u = \cos x \\ v' = (n+1)\sin^n x \cos x \end{cases}$ et, en intégrant par parties il vient :
   $$W_{n+2} = \left[\sin^{n+1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x \, \mathrm{d}x = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^n x \, \mathrm{d}x = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$
   En regroupant les termes, il vient $\boxed{W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n}$.

5. D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
   En multipliant les deux membres par $(n+2)W_{n+1}$ il vient $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$, c'est-à-dire que $\boxed{\text{la suite } ((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$.
   On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

6. On sait que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.
   Si on avait $\ell > 0$ on aurait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)W_{n+1}W_n = +\infty$ par produit sur les limites.
   Or, on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$, on en déduit $\boxed{\ell = 0}$.

7. La question 2 nous permet d'écrire que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.
   En utilisant la question 4, il vient : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$.
   En divisant par W_n (qui est strictement positif) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1}$.

8. À l'aide de l'encadrement trouvé à la question précédente, en utilisant le théorème des gendarmes, il vient $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1}$.
   On a vu que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2} \iff \frac{n+1}{n} \times \frac{W_{n+1}}{W_n} \times nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$.
   En passant à la limite, il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$ puis, par composition, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

9. En faisant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, il vient :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-\, \mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t = \boxed{W_n}.$$

B1 : Existence de l'intégrale de Gauss

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ a donc du sens, quel que soit } n \in \mathbb{N}}$.
   $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n+1}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x > 0$ par positivité de l'intégrale.
   Il suit que $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

2. On a : $\forall x \geq 1,\ x \leq x^2 \iff -x \geq -x^2 \iff \mathrm{e}^{-x} \geq \mathrm{e}^{-x^2}$. On a bien : $\boxed{\forall x \geq 1,\ \mathrm{e}^{-x} \geq \mathrm{e}^{-x^2}}$.

3. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \leq I_1 + \int_1^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^{\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.
   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq I_1 + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leq I_1 + \mathrm{e}^{-1}$ donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et majorée, elle est donc convergente et la notation } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \text{ a du sens}}$.

B2 : Calcul de l'intégrale de Gauss

1. a) Soit la fonction $f(x) = x - \ln(1+x)$ définie sur $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$. f est dérivable et $\forall x > -1,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ qui a le même signe que x (car $x > -1$). f admet donc un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 0$. Il suit que $\boxed{\forall x > -1,\ 0 \leq f(x) \iff \ln(1+x) \leq x}$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0; \sqrt{n}]$ on a $-\frac{x^2}{n} > -1$ et donc $\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leq -\frac{x^2}{n} \iff n\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leq -x^2$.
   En composant avec exp qui est croissante, on a : $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2}$ puis, par croissance de l'intégrale, $\boxed{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\ \mathrm{d}x \leq I_n}$.
   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\cos u$ (qui donne $\mathrm{d}x = -\sqrt{n}\sin u\ \mathrm{d}u$), on a :
   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2 u\right)^n (-\sqrt{n}\sin u)\ \mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u\ \mathrm{d}u = \sqrt{n}\ W_{2n+1}.$$
   La question précédente permet de déduire que $\boxed{\text{prouver que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}\ W_{2n+1} \leq I_n}$.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On procède de façon analogue à la question 1b :
   $$\forall x \in [0; \sqrt{n}],\ \ln(1 + \frac{x^2}{n}) \leq \frac{x^2}{n} \iff -n\ln(1 + \frac{x^2}{n}) \geq -x^2 \iff \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \geq \mathrm{e}^{-x^2}.$$
   En intégrant sur $[0; \sqrt{n}]$ on obtient : $\boxed{I_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}\ \mathrm{d}x}$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan u$ (qui donne $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2 u}\ \mathrm{d}u$) il vient :
   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2 u\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 u}\ \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos u)^{2n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 u}\ \mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u\ \mathrm{d}u.$$
   c) On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_n \leq \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u\ \mathrm{d}u$.
   Or, puisque la fonction intégrée est positive, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u\ \mathrm{d}u \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} u\ \mathrm{d}u$.
   De plus, en utilisant la dernière question de la partie A, cette intégrale vaut W_{2n-2}. On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leq \sqrt{n}\ W_{2n-2}}$.
3. On a prouvé que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sqrt{n}\ W_{2n+1} \leq I_n \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$.
   Or, d'après la question 8 de la partie A : $\sqrt{n}\ W_{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \times \sqrt{2n+1}W_{2n+1} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   De façon analogue, on a $\sqrt{n}W_{2n-2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ce qui permet de conclure, grâce au théorème des gendarmes que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$