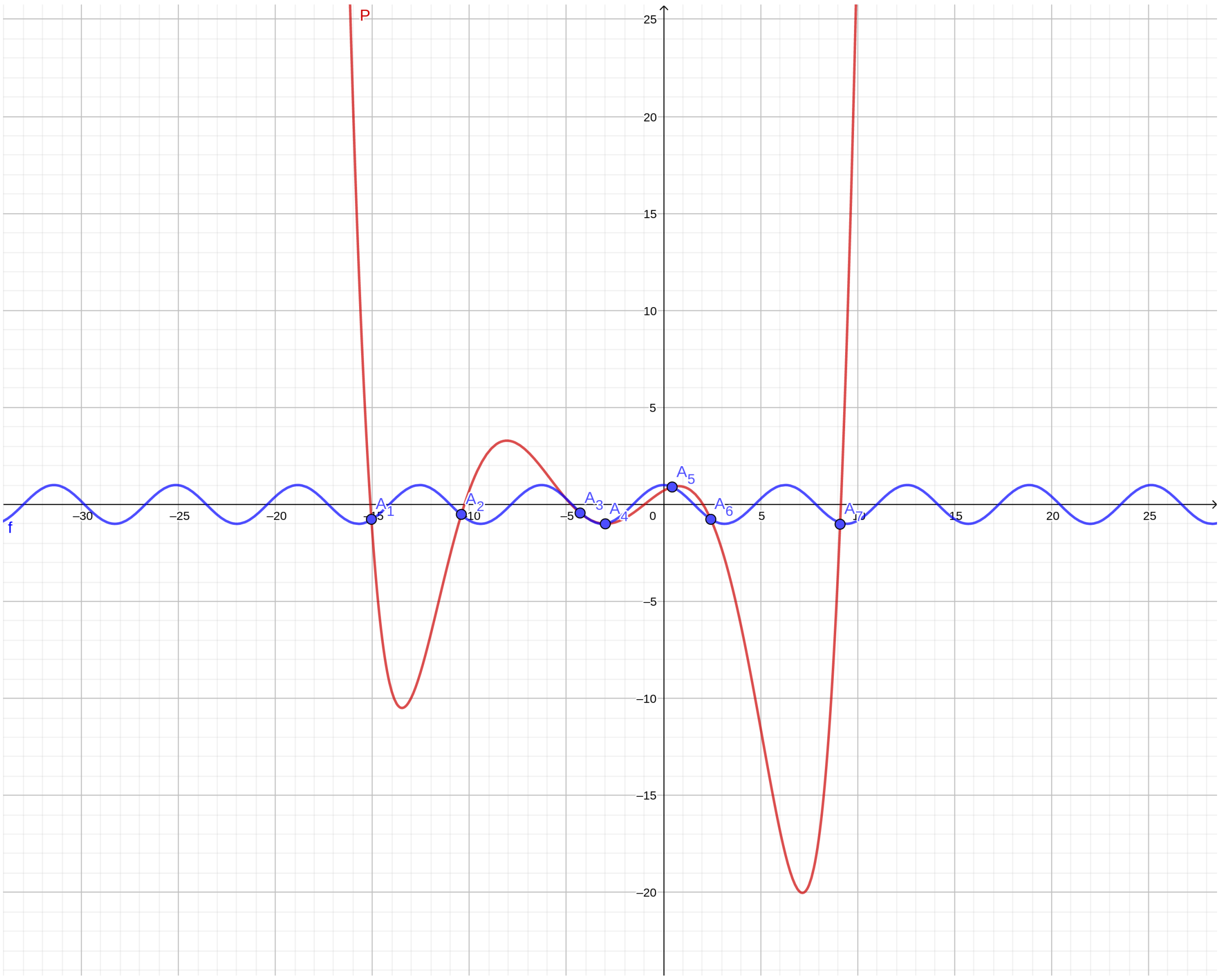
Mathématiques - Correction du Devoir Maison 6

1. S'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$ alors on a nécessairement $y_i \neq y_j$ car les points A_i et A_j sont distincts. $x_i = x_j$ a une unique image par une fonction polynômiale, ça ne peut pas être à la fois y_i et y_j : il n'y a donc pas de solution au problème posé.
   Une autre façon de dire les choses : la courbe d'une fonction (et donc en particulier d'une fonction polynômiale) ne peut pas avoir deux points distincts ayant la même abscisse.

2. **Un exemple pour $n = 3$.**
   On considère les points $A_1(1,4), A_2(2,8)$ et $A_3(3,3)$.
   a) Soit $P = ax^2 + bx + c$, un polynôme de degré 2, $\mathcal{C}_P$ sa courbe représentative.
   $\mathcal{C}_P$ passe par les points $A_1,\ A_2$ et A_3 si, et seulement si, $P(1) = 4,\ P(2) = 8$ et $P(3) = 3$.
   On a : $\begin{cases} P(1) = 4 \\ P(2) = 8 \\ P(3) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases}$.
   La matrice augmentée de ce système est $(M|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 9 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$. On travaille par opérations sur les lignes et il vient $(M|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$ et donc $\boxed{P(x) = -\frac{9}{2}x^2 + \frac{35}{2}x - 9}$.
   b) En gardant les notations de la question précédente, si on modifie les ordonnées des points, on change la colonne augmentée B mais pas la matrice M. On ne change donc pas le rang de la matrice et le système sera toujours compatible avec une unique solution. Autrement dit : $\boxed{\text{il existe toujours un unique polynôme de la forme } ax^2 + bx + c \text{ qui convienne}}$.
   Par contre, rien ne garantit que le polynôme aura pour degré 2 : on pourrait avoir $a = 0$ et alors avoir un polynôme de degré 1 ou même 0 si $b = 0$, voire le polynôme nul si $a = b = c = 0$. Ces cas correspondent à l'alignement des points A_i, sur une droite non-horizontale, horizontale et l'axe des abscisses respéctivement.
   c) On prend $\boxed{L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}}$.
   Le numérateur garantit que $L_1(x_2) = L_1(x_3) = 0$, le dénominateur (qui n'est pas nul car on a supposé $x_1 < x_2 < x_3$) permet d'avoir $L_1(x_1) = 1$.
   On procède de façon analogue pour construire L_2 et L_3.
   d) Le polynôme $4L_1 + 8L_2 + 3L_3$ vérifie le système $\begin{cases} P(1) = 4 \\ P(2) = 8 \\ P(3) = 3 \end{cases}$ dont on a vu que l'unique solution dans $\mathbb{R}_2[X]$ est P.
   Sachant que les L_i sont de degré 2, on déduit que $4L_1 + 8L_2 + 3L_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ puis que $\boxed{P = 4L_1 + 8L_2 + 3L_3}$.

3. **Cas général**
   a) $\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1,n]\!], \text{ le polynôme } L_i(x) = \dfrac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} \text{ convient}}$.
   b) $\boxed{\text{Le polynôme } P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i \text{ convient}}$.

4. On observe que l'interpolation lagrangienne peut varier énormément lorsqu'on déplace légèrement les points. De même, on peut avoir des variations très fortes de l'interpolation entre deux points. L'idée de l'interpolation est d'avoir un modèle polynômial pour « approcher » une fonction dont ont ne connait qu'un nombre fini de valeurs. Si la fonction semble ne prendre que des valeurs ayant un même ordre de grandeur, les variations importantes du polynôme ne seront pas cohérentes avec la fonction qu'on cherche à approcher.
   Pour l'illustrer, on a placé les points sur la courbe de cos qui joue le rôle de la fonction à approcher :



   Pour limiter ce problème, on pourrait discuter le choix des a_i en visant à contrôler l'écart entre la fonction f qu'on cherche à approcher et le polynôme interpolateur.

   Une stratégie différente serait de changer de modèle pour approcher la fonction : ne plus chercher un seul polynôme de degré élevé, mais plutôt des morceaux de polynômes de degré petits (2, 3) qu'on recollerait. C'est l'idée des **splines** qui donneront peut-être lieu à un prochain DM...