Corrigé du DM 12

Ce devoir est l'occasion de faire le point sur les projections.

Dans la partie I, on revoit que les approches géométrique (on ne conserve qu'une composante dans la décomposition des vecteurs relative à deux sous-espaces supplémentaires) et analytique (les endomorphismes qui vérifient $f^2 = f$) coïncident. Les applications proposées correspondent à ces deux approches.

Les parties II et III, moins fondamentales, étudient d'autres propriétés. Si l'endomorphisme f est un projecteur alors son noyau et son image sont supplémentaires. La partie II s'intéresse à la réciproque : la supplémentarité du noyau et de l'image suffit-elle pour Caractériser un projecteur ?
La partie III établit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme f commute avec un projecteur donné.

I. Les projections : définitions et exemples

1. $\boxed{\text{L'identité et l'application nulle vérifient } f^2 = f \text{, il existe donc des projecteurs de } E}$.

2. Il s'agit de prouver une équivalence, on raisonne par double implication. Soit $\vec{x} \in E$.
$\Longrightarrow$ Supposons que $\vec{x} \in \text{Im }(p)$. Alors, il existe $\vec{y} \in E$ tel que $\vec{x} = p(\vec{y})$.
Il suit que $p(\vec{x}) = p(p(\vec{y})) = p^2(\vec{y})$.
Or, p est un projecteur c'est-à-dire $p^2 = p$ d'où $p(\vec{x}) = p(\vec{y}) = \vec{x}$.
$\Longleftarrow$ Supposons que $p(\vec{x}) = \vec{x}$, $\vec{x}$ est l'image d'un élément de E par p donc $\vec{x} \in \text{Im } p$.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } \vec{x} \in E,\ \vec{x} \in \text{Im }(p) \text{ si, et seulement si, } p(\vec{x}) = \vec{x}}$.

3. Soit $\vec{x} \in \ker p \cap \text{Im } p$. En particulier $\vec{x} \in \text{Im } p$ donc, d'après la question précédente, $p(\vec{x}) = \vec{x}$. Or, $\vec{x} \in \ker p$ donc $p(\vec{x}) = \vec{0}$. Finalement, $\ker p \cap \text{Im } p = \{\vec{0}\}$ donc $\ker p$ et $\text{Im } p$ sont en somme directe.
On voit que cette somme vaut l'espace entier en écrivant tout vecteur $\vec{x} \in E$ de la forme :
$$\vec{x} = \underbrace{\vec{x} - p(\vec{x})}_{\in \ker p} + \underbrace{p(\vec{x})}_{\in \text{ Im } p}$$
Finalement, on a bien $\boxed{\ker p \oplus \text{Im }(p) = E}$.

4. On a $q^2 = (Id - p)^2 = (Id - p) \circ (Id - p) = (Id - p) - p(Id - p) = Id - 2p + p^2$. Or, $p^2 = p$ donc $q^2 = Id - p = q$. Finalement, $\boxed{q \text{ est bien un projecteur}}$.
Déterminons $\ker q$ et $\text{Im } q$. Pour tout $\vec{x} \in E$:
   - $\vec{x} \in \ker q \Longleftrightarrow q(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{x} - p(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x}$.
   D'après la question 2, c'est équivalent à $\vec{x} \in \text{Im } p$. Finalement, $\boxed{\ker q = \text{Im } p}$.
   - $\vec{x} \in \text{Im } q \Longleftrightarrow \exists \vec{y} \in E / \vec{x} = q(\vec{y})$. On a alors $\vec{x} = \vec{y} - p(\vec{y})$ qui est dans $\ker p$ c'est-à-dire $\text{Im } q \subset \ker p$. L'inclusion réciproque est vraie : si $\vec{x} \in \ker p$ alors $\vec{x} = \vec{x} - p(\vec{x}) = q(\vec{x})$ et donc $\vec{x} \in \text{Im } q$. Finalement, $\boxed{\text{Im } q = \ker p}$.

5. a) On p_1 est une application $E \to E$, il faut s'assurer de sa linéarité.
Soit $(\vec{x}, \vec{y}, \lambda, \mu) \in E^2 \times \mathbb{R}^2$. En adoptant les notations de l'énoncé, on a d'uniques décompositions $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ et $\vec{y} = \vec{y}_F + \vec{y}_G$ avec $(\vec{x}_F, \vec{y}_F, \vec{x}_G, \vec{y}_G) \in F^2 \times G^2$ et $p_1(\vec{x}) = \vec{x}_F$ et $p_1(\vec{y}) = \vec{y_F}$. On a alors :
$$p_1(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = p_1(\lambda(\vec{x}_F + \vec{x}_G) + \mu(\vec{y}_F + \vec{y}_G)) = p_1(\underbrace{\lambda\vec{x}_F + \mu\vec{y}_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda\vec{x}_G + \mu\vec{y}_G}_{\in F})$$
D'après la définition de p_1, $p_1(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda\vec{x}_F+\mu\vec{y}_F = \lambda p_1(\vec{x})+\mu p_1(\vec{y})$ et $\boxed{p_1 \text{ est bien linéaire}}$.
$\mathcal{L}(E)$ est stable par combinaison linéaire, $\boxed{q_1 = Id - p_1 \text{ est donc un endomorphisme de } E}$.

b) Pour tout $\vec{x}_F \in F$, $\vec{x}_F = \underbrace{\vec{x}_F}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G}$ donc $p_1(\vec{x}_F) = \vec{x}_F$.

Il suit que pour $\vec{x} \in E$, $p_1^2(\vec{x}) = p(\vec{x}_F) = \vec{x}_F = p(\vec{x})$ donc $p_1^2 = p_1$ et $\boxed{p_1 \text{ est un projecteur}}$.

D'après la question 4, p_1 étant un projecteur, $\boxed{q_1 = Id - p_1 \text{ est un projecteur}}$.

c) D'après la question 4, $\boxed{F = \text{Im } p_1 = \ker q_1 \text{ et } G = \ker p_1 = \text{Im } q_1}$.

d) D'après la question 5b), si f est la projection sur Im (f) parallèlement à $\ker f$ alors f est un projecteur.

Soit f un projecteur de E. D'après la question 3. et l'écriture des vecteurs de E sous la forme $\vec{x} = \underbrace{\vec{x} - f(\vec{x})}_{\in \ker f} + \underbrace{f(\vec{x})}_{\in \text{ Im } f}$, f est la projection sur Im (f) parallèlement à $\ker f$.

$\boxed{\text{Finalement, on a bien l'équivalence demandée}}$.

6. a) Pour tout $\vec{u}(x;y;z)$ on a :

- $\vec{u} \in D \iff (x;y;z) = (x;x;x) = x(1;1;1)$ et donc $\boxed{D = \text{Vect}(1;1;1)}$.
- $\vec{u} \in P \iff y = -2x \iff (x;y;z) = (x;-2x;z) = x(1;-2;0) + z(0;0;1)$ et donc $\boxed{P = \text{Vect}((1;-2;0),(0;0;1))}$.

Finalement, $\boxed{D \text{ est une droite vectorielle et } P \text{ est un plan vectoriel}}$ (car $(1;-2;0)$ et $(0;0;1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de P).

Le vecteur $(1;1;1)$ n'est pas dans P, on en déduit que $\boxed{D \text{ et } P \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}$.

b) Soit $\vec{u}(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$, il existe un unique couple $(\vec{u}_D, \vec{u}_P) \in D \times P$ tel que $\vec{u} = \vec{u}_D + \vec{u}_P$. Autrement dit, il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(x;y;z) = \underbrace{\alpha(1;1;1)}_{\vec{u}_D} + \underbrace{\beta(1;-2;0) + \gamma(0;0;1)}_{\vec{u}_P} \quad : (\star)$$

On a $(\star) \iff \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - 2\beta = y \\ \alpha + \gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(2x+y) \\ \beta = \frac{1}{2}(\alpha - y) \\ \gamma = z - \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(2x+y) \\ \beta = \frac{1}{3}(x-y) \\ \gamma = \frac{1}{3}(-2x-y+3z) \end{cases}$. Il suit que

$\boxed{\vec{u}_D = \alpha(1;1;1) = (\frac{2x+y}{3}; \frac{2x+y}{3}; \frac{2x+y}{3})}$ et $\boxed{\vec{u}_P = \beta(1;-2;0) + \gamma(0;0;1) = (\frac{x-y}{3}; \frac{-2x+2y}{3}; \frac{-2x-y+3z}{3})}$.

c) En conservant les notations précédentes, la projection sur D parallèlement à P est l'application linéaire $\vec{u} \longmapsto \vec{u}_P$ c'est-à-dire $\boxed{(x;y;z) \longmapsto (\frac{2x+y}{3}; \frac{2x+y}{3}; \frac{2x+y}{3})}$.

7. a) On vérifie sans difficulté que, pour tous triplets $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ de $\mathbb{R}^3$ ainsi que pour tout réel λ on a :

— $\phi((x;y;z) + (x';y';z')) = \phi((x;y;z)) + \phi((x';y';z'))$;

— $\phi(\lambda(x;y;z)) = \lambda\phi((x;y;z))$.

Finalement, $\boxed{\phi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

Remarque : plutôt que d'annoncer directement que ϕ respecte les combinaisons linéaires, on a « découpé » en deux en annonçant que ϕ respecte les sommes de vecteurs et les mutliplications par un scalaire.

b) On a vu que les projections sont les endomorphismes qui vérifient $f^2 = f$, on veut donc prouver que $\phi^2 = \phi$. Par linéarité de ϕ, il suffit de le prouver pour une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $\phi(\vec{i}) = \phi((1;0;0)) = \frac{1}{10}(3;2;1)$ et $\phi^2(\vec{i}) = \phi(\frac{1}{10}(3;2;1)) = \frac{1}{10}\phi((3;2;1)) = \frac{1}{100}(30;20;10)$.

On a bien $\phi^2(\vec{i}) = \phi(\vec{i})$. On montre de la même façon que $\phi^2(\vec{j}) = \phi(\vec{j})$ et $\phi^2(\vec{k}) = \phi(\vec{k})$.

$\boxed{\phi \text{ est donc une projection de } \mathbb{R}^3}$.

Les éléments caractéristiques de ϕ sont son noyau et son image (qui est l'ensemble des vecteurs fixes par ϕ), déterminons-les.

— $(x;y;z) \in \ker \phi \iff \begin{cases} 3x+6y+9z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \iff x+2y+3z=0$ qui est l'équation d'un plan de l'espace.

— $(x;y;z) \in \text{Im } \phi \iff \phi((x;y;z)) = (x;y;z) \iff \begin{cases} 3x+6y+9z=10x \\ 2x+4y+6z=10y \\ x+2y+3z=10z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -7x+6y+9z=0 \\ 2x-6y+6z=0 \\ x+2y-7z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3z \\ y=2z \end{cases}$. On en déduit que Im ϕ est la droite vectorielle engendrée par $(3;2;1)$.

II. Lien entre projection et supplémentarité de l'image et du noyau

1. On travaille par double implication.
   Supposons que $\ker f = \ker f^2$ et montrons que $\text{Im } f \cap \ker f = \{\vec{0}\}$.
   Soit $\vec{u} \in \text{Im } f \cap \ker f$. Comme $\vec{u} \in \text{Im } f$, il existe $\vec{v} \in E$ tel que $\vec{u} = f(\vec{v})$. Comme $\vec{u} \in \ker f$ on a $f(\vec{u}) = \vec{0} \iff f^2(\vec{v}) = \vec{0}$ donc $\vec{v} \in \ker f^2$. Or, $\ker f = \ker f^2$ donc $\vec{v} \in \ker f$ et $f(\vec{v}) = \vec{0} \iff \vec{u} = \vec{0}$.
   Réciproquement, supposons que $\text{Im } f \cap \ker f = \{\vec{0}\}$ et montrons que $\ker f = \ker f^2$.
   si $f(\vec{u}) = \vec{0}$ alors $f^2(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $\ker f \subset \ker f^2$ (c'est vrai pour tout endomorphisme), montrons que $\ker f \supset \ker f^2$. Soit $\vec{u} \in \ker f^2$. On a $f(f(\vec{u})) = \vec{0}$ donc $f(\vec{u}) \in \text{Im } f \cap \ker f$ donc $f(\vec{u}) = \vec{0}$ d'après notre hypothèse. Il suit que $\vec{u} \in \ker f$.
   Finalement, on a bien $\boxed{\ker f = \ker f^2 \iff \text{Im } f \cap \ker f = \{\vec{0}\}}$.

2. On travaille par double implication.
   Supposons que $\text{Im } f + \ker f = E$ et montrons que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.
   Pour tout endomorphisme on a $\text{Im } f \supset \text{Im } f^2$, montrons que $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$. Soit $\vec{u} \in \text{Im } f$, il existe donc $\vec{v} \in E$ tel que $\vec{u} = f(\vec{v})$. D'après notre hypothèse, il existe $(\vec{a}, \vec{b}) \in \text{Im } f \times \ker f$ tel que $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$. Comme $\vec{b} \in \text{Im } f$, il existe $\vec{c} \in E$ tel que $\vec{b} = f(\vec{c})$ et donc $\vec{v} = \vec{a} + f(\vec{c})$. On a donc $\vec{u} = f(\vec{v}) = f(\vec{a} + f(\vec{c})) = f^2(\vec{c})$ par linéarité de f et puisque $\vec{a} \in \ker f$. Finalement, on a $\vec{u} \in \text{Im } f^2$ et $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$.
   Réciproquement, supposons que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ et montrons que $\text{Im } f + \ker f = E$.
   Soit $\vec{u} \in E$, $f(\vec{u}) \in \text{Im } f$ donc $f(\vec{u}) \in \text{Im } f^2$ et il existe $\vec{v} \in E$ tel que $f^2(v) = f(\vec{u})$. Par linéarité de f on a alors $f(\vec{u} - f(\vec{v})) = \vec{0}$ et l'écriture $\vec{u} = \underbrace{f(\vec{v})}_{\in \text{Im } f} + \underbrace{\vec{u} - f(\vec{v})}_{\in \ker f}$ prouve que $E = \ker f + \text{Im } f$.
   Finalement, on a bien $\boxed{\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Im } f + \ker f = E}$.

3. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, l'application linéaire $(x;y) \mapsto (-x;0)$ n'est pas un projecteur et pourtant $\ker f = \text{Vect}(\vec{j})$ et $\text{Im } f = \text{Vect}(\vec{i})$ sont supplémentaires dans E.

III. Commutabilité avec des projecteurs

1. On a l'embarras du choix : l'identité, l'application nulle, les homothéties commutent avec tous les endomorphismes et donc avec tous les projecteurs. Pour un projecteur p donné, on peut aussi remarquer que p commute avec p.

2. Soit p un projecteur de E, f un élément de $\mathcal{L}(E)$.
   Montrons par double implication que f et p commutent si, et seulement si, Im p et $\ker p$ sont stables par f.
   $\Longrightarrow$ Supposons que f et p commutent.
   Soit $\vec{u} \in \ker p$, on a $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(p(\vec{u})) = p(f(\vec{u}))$ donc $f(\vec{u}) \in \ker p$.
   Soit $\vec{u} \in \text{Im } p$, on a donc $p(\vec{u}) = \vec{u}$. Il suit que $f(\vec{u}) = f(p(\vec{u})) = p(f(\vec{u}))$ et donc $f(\vec{u}) \in \text{Im } p$.
   On a bien $\underline{\ker p \text{ et Im } p \text{ qui sont stables par } f}$.

$\Longleftarrow$ Supposons que $\ker p$ et $\text{Im } p$ sont stables par f, on veut prouver que f et p commutent c'est-à-dire que pour tout $\vec{u} \in E$, $p(f(\vec{u})) = f(p(\vec{u}))$.
Comme $E = \text{Im } p \oplus \ker p$, par linéarité, il suffit d'établir que f et p commutent sur $\text{Im } p$ et $\ker p$ pour en déduire que f et p commutent sur E.
Soit $\vec{u} \in \ker p$. D'une part, $f(p(\vec{u})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ et d'autre part, comme $\ker p$ est stable par f, il existe $\vec{v} \in \ker p$ tel que $f(\vec{u}) = \vec{v}$. On a donc $p(f(\vec{u})) = p(\vec{v}) = \vec{0}$.
Soit $\vec{u} \in \text{Im } p$. Commençons par rappeler que les vecteurs de $\text{Im } p$ sont fixes par p.
$\text{Im } p$ étant stable par f, $f(\vec{u} \in \text{Im } p$ et $p(f(\vec{u}) = f(u)$. D'autre part $f(p(\vec{u})) = f(\vec{u})$.