PCSI - Correction du sujet de mathématiques, concours blanc 2021.

Problème d'algèbre : Images et noyaux itérés

I. Un exemple

1. Il s'agit de prouver que ϕ respecte les combinaisons linéaires, c'est-à-dire que pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$ et tous réels λ, μ on a $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$.
   Soit donc $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = dX^2 + eX + f$ avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$. On a, pour tous réels λ, μ :
   $\phi(\lambda P + \mu Q) = \phi(\lambda(aX^2 + bX + c) + \mu(dX^2 + eX + f)) = \phi(X^2(\lambda a + \mu d) + X(\lambda b + \mu e) + \lambda c + \mu f)$
   $= X^2(\lambda b + \mu e + \lambda c + \mu f) + X(\lambda c + \mu f) = \lambda((b+c)X^2 + cX) + \mu((e+f)X^2 + fX)$
   $= \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$.
   Finalement, $\boxed{\phi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$.

2. On a $\phi^0 = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$ et $\boxed{N_0 = \ker Id_{\mathbb{R}_2[X]} = \{0\}}$.
   Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in N_1 \iff P \in \ker\phi \iff \phi(P) = 0$. Si $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on a $P \in N_1 \iff (c+b)X^2 + cX = 0 \iff b = c = 0 \iff P = aX^2$. Finalement, $\boxed{N_1 = \mathrm{Vect}(X^2)}$.

3. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$. $\phi^2 = \phi \circ \phi$ et $\phi^3 = \phi \circ \phi \circ \phi$, on a par linéarité :

$$1 \overset{\phi}{\longmapsto} X + X^2 \quad ; \quad X \overset{\phi}{\longmapsto} X^2 \quad ; \quad X^2 \overset{\phi}{\longmapsto} 0$$

$$1 \overset{\phi}{\longmapsto} X + X^2 \overset{\phi}{\longmapsto} X^2 \quad ; \quad X \overset{\phi}{\longmapsto} X^2 \overset{\phi}{\longmapsto} 0 \quad ; \quad X^2 \overset{\phi}{\longmapsto} 0 \overset{\phi}{\longmapsto} 0$$

$$1 \overset{\phi}{\longmapsto} X + X^2 \overset{\phi}{\longmapsto} X^2 \overset{\phi}{\longmapsto} 0 \quad ; \quad X \overset{\phi}{\longmapsto} X^2 \overset{\phi}{\longmapsto} 0 \overset{\phi}{\longmapsto} 0 \quad ; \quad X^2 \overset{\phi}{\longmapsto} 0 \overset{\phi}{\longmapsto} 0 \overset{\phi}{\longmapsto} 0$$

4. D'après la question précédente, $N_2 = \ker\phi^2$ contient le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(X, X^2)$. Si on avait $\dim N_2 = 3$ on aurait $N_2 = \mathbb{R}_2[X]$ or, $\phi^2(1) \neq 0$ donc $1 \notin N_2$. Finalement, $\boxed{N_2 = \mathrm{Vect}(X, X^2)}$.
   D'après la question précédente, ϕ^3 est l'application nulle et donc $\boxed{N_3 = \ker\phi^3 = \mathbb{R}_2[X]}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $\phi^{3+k}(P) = \phi^k(\phi^3(P)) = \phi^k(0) = 0$ et donc $P \in \mathbb{N}_{3+k}$.
   Finalement, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ on a } N_{3+k} = N_3 = \mathbb{R}_2[X]}$.

II. Quelques généralités

1. On a $\phi^0 = Id_E$ donc $N_0 = \ker Id_E = \{\vec{0}_E\}$ et $I_0 = \mathrm{Im}\ Id_E = E$.
2. $\mathcal{L}(E)$ est stable par composition, ϕ^p est bien un endomorphisme de E (pour tout $p \in \mathbb{N}$).
   Il suit que N_p et I_p sont respectivement le noyau et l'image de l'endomorphisme ϕ^p. Or, le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels (de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée respectivement), on en déduit que $\boxed{N_p \text{ et } I_p \text{ sont bien des sous-espaces vectoriels de } E}$.
3. Soit $p \geq 1$, on veut prouver que : $\forall k \in [\![0; p-1]\!]$ on a $N_k \subset N_{k+1}$.
   Soit $k \in [\![0; p-1]\!]$ et $\vec{x} \in N_k$, c'est-à-dire que $\phi^k(\vec{x}) = \vec{0}$. On a alors $\phi^{k+1}(\vec{x}) = \phi(\phi^k(\vec{x})) = \phi(\vec{0}) = \vec{0}$ c'est-à-dire $\vec{x} \in N_{k+1}$. Finalement, $\boxed{\text{on a bien } N_k \subset N_{k+1}}$.
4. Soit $p \geq 1$, on veut prouver que : $\forall k \in [\![0; p-1]\!]$ on a $I_{k+1} \subset I_k$.
   Soit $k \in [\![0; p-1]\!]$ et $\vec{x} \in I_{k+1}$, c'est-à-dire qu'il existe $\vec{y} \in E$ tel que $\phi^{k+1}(\vec{y}) = \vec{x}$.
   On a : $\phi^{k+1}(\vec{y}) = \vec{x} \iff \phi \circ \phi^k(\vec{y}) = \vec{x} \iff \phi^k \circ \phi(\vec{y}) = \vec{x} \iff \phi^k(\phi(\vec{y})) = \vec{x}$ et donc $\vec{x} \in I_k$.
   Finalement, $\boxed{\text{on a bien } I_{k+1} \subset I_k}$.

III. Condition pour que N_1 et I_1 soient supplémentaires dans E

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On applique le théorème du rang à l'endomorphisme ϕ^p :

$$\dim E = \dim\ker\phi^p + \dim \mathrm{Im}\ \phi^p \iff \boxed{n = \dim N_p + \dim I_p}$$

2. Supposons que $N_1 = N_2$. D'après la question précédente, on a $\dim \mathrm{Im}\ I_1 = \dim \mathrm{Im}\ I_2$ $(= n - \dim N_1)$.
   Or, d'après la questions II.4., on a $I_2 \subset I_1$. I_2 est donc un sous-espace de I_1 alors qu'ils ont la même dimension, on en déduit $I_2 = I_1$. On démontre l'implication réciproque en raisonnant de façon analogue et en se servant de la question II.3. qui assure que $N_1 \subset N_2$.
   Finalement, on a bien $\boxed{N_1 = N_2 \iff I_1 = I_2}$.

3. Supposons que $N_1 = N_2$. La question 1. nous assure que $\dim E = \dim I_1 + \dim N_1$. Pour montrer que N_1 et I_1 sont supplémentaires dans E, il suffit donc de prouver que $I_1 \cap N_1 = \{\vec{0}\}$.
Soit $\vec{x} \in I_1 \cap N_1$. On a $\vec{x} \in I_1$ donc il existe $\vec{y} \in E$ tel que $\phi(\vec{y}) = \vec{x}$. On a aussi $\vec{x} \in N_1$ donc $\phi(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \phi^2(\vec{y}) = \vec{0}$. On a donc $\vec{y} \in N_2$ et donc $\vec{y} \in N_1$ puisqu'on a supposé $N_1 = N_2$.
Il suit que $\phi(\vec{y}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Finalement, $I_1 \cap N_1 = \{\vec{0}\}$ et $\boxed{N_1 \text{ et } I_1 \text{ sont supplémentaires dans } E}$.
4. Supposons que N_1 et I_1 sont supplémentaires dans E et montrons que $N_1 = N_2$.
On a $N_1 \subset N_2$ d'après la question I.3., on doit donc établir que $N_1 \supset N_2$.
Soit $\vec{x} \in N_2$, on veut prouver que $\vec{x} \in N_1$ c'est-à-dire que $\phi(\vec{x}) = \vec{0}$. N_1 et I_1 étant supplémentaires dans E, il existe une (unique) décomposition du vecteur $\phi(\vec{x})$ sous la forme $\phi(\vec{x}) = \vec{a} + \vec{b}$ avec $\vec{a} \in N_1$ et $\vec{b} \in I_1$, c'est-à-dire qu'il existe $\vec{c} \in E$ tel que $\vec{b} = \phi(\vec{c})$ et alors $\phi(\vec{x}) = \vec{a} + \phi(\vec{c})$. On a alors :
$$\vec{0} = \phi^2(\vec{x}) = \phi(\phi(\vec{x})) = \phi(\vec{a} + \phi(\vec{c})) = \phi(\vec{a}) + \phi^2(\vec{c}) = \phi^2(\vec{c})$$
Il suit que $\phi(\vec{c}) \in N_1$. Or $\phi(\vec{c}) \in I_1$ donc $\phi(\vec{c}) = \vec{0}$ car $I_1 \cap N_1 = \{\vec{0}\}$. On a donc bien $\vec{x} \in N_1$ et $\boxed{N_1 = N_2}$.
5. Si ϕ est un projecteur, on a $\phi^2 = \phi$ et, par une récurrence immédiate, $\phi^p = \phi$ pour tout $p \geq 1$.
Il suit que $\boxed{N_1 = N_p \text{ et } I_1 = I_p, \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*}$.
6. On se place dans $\mathbb{R}^2$ soit l'application linéaire ϕ définie par : $\phi(1,0) = (0,0)$ et $\phi(0,1) = (0,2)$.
Il est évident que $I_1 = \mathrm{Vect}(0,1)$ et $N_1 = \mathrm{Vect}(1,0)$. On a donc $\boxed{\mathbb{R}^2 = I_1 \oplus N_1 \text{ mais } \phi \text{ n'est pas un projecteur}}$.

IV. Une décomposition de E toujours possible

1. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'existe pas d'entier naturel $r \leq n$ tel que $N_r = N_{r+1}$.
D'après ce qui a été vu à la question II.3. on a $\{\vec{0}\} \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n$ et les inclusions sont donc strictes. En considérant les dimensions, on obtient : $0 < \dim N_1 < \dim N_2 < \cdots < \dim N_n$. Comme une dimension est un entier naturel, on a alors $\dim N_n > n$. C'est absurde car N_n est un sous-espace vectoriel de E, dont la dimension est n.
Finalement, $\boxed{\text{il existe un plus petit entier naturel } r \text{ tel que } r \leq n \text{ et } N_r = N_{r+1}}$.
2. On a vu que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $n = \dim N_p + \dim I_p$. Comme $N_r = N_{r+1}$ on a $\dim I_r = \dim I_{r+1}$.
Or, on sait que I_{r+1} est un sous-espace vectoriel de I_r, puisqu'ils ont la même dimension on a $\boxed{I_r = I_{r+1}}$.
3. Prouvons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $I_{n+p} = I_r$ et $N_{n+p} = N_r$.
   — **Initialisation pour $p = 0$:** c'est évident.
   — **Hérédité :** supposons que $I_{n+p} = I_r$ et $N_{n+p} = N_r$; montrons que $I_{n+p+1} = I_r$ et $N_{n+p+1} = N_r$.
   On a vu que $N_{r+p} \subset N_{r+p+1}$, prouvons l'inclusion réciproque.
   Soit $\vec{x} \in N_{r+p+1}$. On a $\phi^{n+p+1}(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \phi^{r+1}(\phi^p(\vec{x})) = \vec{0}$. Le vecteur $\phi^p(\vec{x})$ est donc dans N_{r+1}.
   Or, $N_{r+1} = N_r$, on a donc $\phi^r(\phi^p(\vec{x})) = \vec{0}$ et $\vec{x} \in N_{r+p}$.
   Finalement, $N_{r+p+1} \subset N_{r+p}$ et $N_{r+p+1} = N_{r+p} = N_r$ par hypothèse de récurrence.
   De façon analogue à la question précédente, on en déduit $I_{r+p+1} = I_{r+p}$ puis $I_{r+p+1} = I_r$ par hypothèse de récurrence.
   — **Conclusion :** la propriété a été initialisée pour $p = 0$, elle est héréditaire donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   Autrement dit, $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N} \text{ on a } I_{n+p} = I_r \text{ et } N_{n+p} = N_r}$.
4. Comme $\dim I_r + \dim N_r = \dim E$, pour montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E, il suffit de montrer que $I_r \cap N_r = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in I_r \cap N_r$. On a :
$$\vec{x} \in N_r \Longleftrightarrow \phi^r(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{x} \in I_r \Longleftrightarrow \exists \vec{y} \in E / \phi^r(\vec{y}) = \vec{x}$$
On en déduit que $\phi^{2r}(\vec{y}) = \vec{0}$ et donc $\vec{y} \in N_{2r}$. Mais on sait que $N_{2r} = N_r$ et donc $\phi^r(\vec{y}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
Finalement, $I_r \cap N_r = \{\vec{0}\}$

Problème d'analyse : étude de $\sum \frac{1}{n^2}$.

1. a) Soit deux réels a et b, on a :
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b - (\sin a \cos b - \cos a \sin b) = 2 \cos a \sin b$$
En divisant par 2 on a bien $\boxed{\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))}$.

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a : $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}) \boxed{= -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos 0 \boxed{= n}$.

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$. On a : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2kx}\right) = \mathrm{Re}(S_n(x))$.
$S_n(x)$ est une somme géométrique dont la raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}$ est différente de 1 (car $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$).
Il suit que $S_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2nx}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\sin nx}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin x}$ en appliquant la formule vue en b). On a alors :

$$f_n(x) = \mathrm{Re}(S_n(x)) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x})\frac{\sin nx}{\sin x} = \cos((n+1)x)\times\frac{\sin nx}{\sin x}\boxed{= \frac{\sin(2n+1)x - \sin x}{2\sin x}}.$$

en appliquant la formule vue en a) avec $a = (n+1)x$ et $b = nx$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, fixé. Soit la fonction g définie que $]0; \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = \frac{ax+bx^2}{\sin x}$.

a) Pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin x > 0$ et g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme quotient bien défini de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Pour $x \to 0$ on a $ax + bx^2 \sim ax$ et $\sin x \sim x$ on a donc par quotient $g(x) \underset{0}{\sim} a$.

On en déduit que $\boxed{g \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } g(0) = a}$.

Dorénavant, on considère que g est définie et continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

b) On a déjà justifié que g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. On fait un développement limité au voisinage de 0 :

$$g(x) \underset{0}{=} \frac{x(a+bx)}{x(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))} \underset{0}{=} (a+bx)(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2) \underset{0}{=} a + bx + \frac{ax^2}{6} + o(x^2)$$

On en déduit que $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = b}$ (on revoit également que g est continue en 0 si, et seulement si, $g(0) = a$).

c) On sait déjà que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, les formules de dérivation usuelles donnent :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}],\ g'(x) = \frac{(2bx+a)\sin x - (ax+bx^2)\cos x}{\sin^2 x}$$

On a vu à la question précédente que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = b$.
Il reste à vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = b$. On se sert d'un développement limité en 0 :

$$g'(x) \underset{0}{=} \frac{(2bx+a)(x+o(x)) - (ax+bx^2)(1+o(x))}{(x+o(x))^2} \underset{0}{=} \frac{bx^2+o(x)}{x^2+o(x^2)} \underset{0}{\sim} b$$

Finalement, $\boxed{g' \text{ est continue en } 0 \text{ et donc sur } [0; \frac{\pi}{2}], \text{ c'est-à-dire que } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{2}]}$.

3. On note, pour tout entier naturel n non nul, $G_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin nx\ \mathrm{d}x$.

a) On a vu que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et donc, comme $x \mapsto \sin nx$ l'est aussi, $x \mapsto g(x)\sin nx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Finalement, $\boxed{G_n \text{ est bien défini comme intégrale d'une fonction } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{2}]}$.

b) On procède par parties en posant $\begin{cases} u(x) = g(x) \\ v'(x) = \sin nx \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = g'(x) \\ v(x) = -\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$. Il suit que :

$$G_n = \left[-\frac{1}{n}g(x)\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\cos nx\ \mathrm{d}x = \frac{a - g(\frac{\pi}{2})\cos(n\frac{\pi}{2})}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\cos nx\ \mathrm{d}x$$

On a $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\cos nx\ \mathrm{d}x\right| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g'(x)\cos nx|\ \mathrm{d}x \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g'(x)|\ \mathrm{d}x$.

Il suit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\cos nx\ \mathrm{d}x = 0$ puis que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} G_n = 0}$.

II. Nature et somme de $\sum \frac{1}{n^2}$

1. $\boxed{\sum \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente}}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   a) On procède par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2kx \ \mathrm{d}x = \underbrace{\left[x\frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2kx \ \mathrm{d}x = \frac{1}{4k^2}\left[\cos 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{= \frac{(-1)^k - 1}{4k^2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2kx \ \mathrm{d}x = \underbrace{\left[x^2\frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin 2kx \ \mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2kx \ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left[x\cos 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx \ \mathrm{d}x = \frac{(-1)^k\pi}{4k^2} - \frac{1}{4k^3}\underbrace{\left[\sin 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}$$

$$= \boxed{\frac{(-1)^k\pi}{4k^2}}$$

   b) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\cos 2kx \ \mathrm{d}x \ = \ a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2kx \ \mathrm{d}x + b\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2kx \ \mathrm{d}x = \frac{(-1)^k(a+b\pi)-a}{4k^2}$$

   et alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\cos 2kx \ \mathrm{d}x = \frac{1}{4k^2} \iff (-1)^k(a+b\pi)-a = 1.$ $\boxed{\text{Le couple } (a,b) = (-1, \tfrac{1}{\pi}) \text{ convient}}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la question précédente puis la linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\cos 2kx \ \mathrm{d}x\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\sum_{k=1}^n \cos 2kx \ \mathrm{d}x \boxed{= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)f_n(x) \ \mathrm{d}x}.$$

4. On utilise la question précédente ainsi que l'expression de $f_n(x)$ établie à la question 1.c) de la partie I :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)f_n(x) \ \mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\frac{\sin(2n+1)x - \sin x}{2\sin x} \ \mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \ \mathrm{d}x - \ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \ \mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin(2n+1)x \ \mathrm{d}x - \ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \ \mathrm{d}x \boxed{= \ 2G_{2n+1} \ - \ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \ \mathrm{d}x}.$$

   Remarque : l'existence des intégrales est assurée par les résultats de la partie I.

5. On a vu que $G_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $G_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après la question précédente, on déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \ \mathrm{d}x.$$

   On calcule : $\displaystyle -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \ \mathrm{d}x \ = \ -2\left[\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}bx^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \ = \ -\frac{a\pi^2}{4} - \frac{b\pi^3}{12}$ puis on remplace (a,b) par $(-1, \frac{1}{\pi})$ qui est la valeur trouvée à la question 2 et on a : $\displaystyle -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \ \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$.

   Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.