PCSI - Corrigé du DM4

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) + f(-x)$ avec f qui est solution de $(\star)\ :\ f''(x) - f(-x) = x$.
   a) f ést définie sur $\mathbb{R}$ donc g aussi et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$ donc $\boxed{g \text{ est paire}}$.
   b) f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ alors g l'est également et on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) - f'(-x) \quad \text{et} \quad g''(x) = f''(x) + f''(-x).$$
   c) f est solution de $(\star)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = x + f(-x)$. Il suit qu'on a également $f''(-x) = -x + f(x)$. En utilisant le résultat de la question précédente :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = x + f(-x) + (-x + f(x)) = f(x) + f(-x) = g(x).$$
   Finalement, $\boxed{g \text{ est bien solution de (1) : } y'' = y}$.
   d) (1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, ses solutions sont de la forme $y(x) = \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Une telle fonction est paire si, et seulement si, pour tout réel x on a $y(-x) = y(x)$, ce qui est équivalent à $\lambda = \mu$.
   Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions paires de (1) est } \{x \mapsto \lambda(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) / \lambda \in \mathbb{R}\}}$.
2. On pose, $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - f(-x) - 2x$. On vérifie que $\boxed{h \text{ est impaire}}$ puis, après avoir calculé les dérivées de h on observe que que $\boxed{h \text{ est solution de (2) : } y'' = -y}$.
   Cette équation est linéaire du second ordre à coefficients constants. On sait la résoudre et on ne conserve que ses solutions impaires et on trouve que $\boxed{h \text{ de la forme } x \mapsto \mu \sin x, \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}}$.
3. On a $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = 2f(x) - 2x \iff f(x) = \frac{g(x)+h(x)}{2} + x$. On utilise alors les expressions trouvées pour $g(x)$ et $h(x)$:
   $$f(x) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + \frac{\mu}{2} \sin x + x$$
   Les constantes λ et μ désignent des réels quelconques donc, quitte à les renommer, on trouve bien la forme voulue : $\boxed{f(x) = \lambda(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + \mu \sin x + x\ :\ (\spadesuit)}$.
4. On a vu que s'il existe une solution de $(\star)$ alors elle est de la forme $(\spadesuit)$. Il reste à vérifier que les fonctions de cette forme sont bien des solutions de $(\star)$ (c'est-à-dire : après l'analyse, faire la synthèse).
   Soit donc $f(x) = \lambda(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + \mu \sin x + x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lambda(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + \mu \cos x + 1 \quad \text{et} \quad f''(x) = \lambda(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - \mu \sin x$$
   On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f(-x) = \lambda(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - \mu \sin x - \lambda(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x) - \mu \sin(-x) + x = x$.
   Finalement, $\boxed{\text{les fonctions de la forme } (\spadesuit) \text{ sont bien solutions de } (\star)}$.

Exercice optionnel

1. Soit $\theta \in]-\pi; \pi[$. On calcule :
   $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - \tan^2\frac{\theta}{2} + 2\mathrm{i}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$
   On pose $x = \tan\frac{\theta}{2}$ et on utilise $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1 - x^2 + 2\mathrm{i}x}{1 + x^2} = \dfrac{(1 + \mathrm{i}x)^2}{1 - (\mathrm{i}x)^2} = \boxed{\dfrac{1 + \mathrm{i}x}{1 - \mathrm{i}x}}$.
   (Les calculs étaient bien licites car $-\pi < \theta < \pi \iff -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \implies \cos\frac{\theta}{2} \neq 0$).
2. On a $\cos\theta = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\right) = \boxed{\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}}$ et $\sin\theta = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\right) = \boxed{\dfrac{2x}{1 + x^2}}$.
3. On a, pour $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$ on veut calculer $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$. On fait le changement de variable $x = \tan\frac{\theta}{2}$:
   - $\frac{1}{\cos\theta}$ devient $\frac{1+x^2}{1-x^2}$;
   - $x = \tan\frac{\theta}{2} \iff \theta = 2\mathrm{Arctan}x$ et donc $\mathrm{d}\theta$ devient $\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

- les bornes d'intégration deviennent 0 et $\tan\frac{t}{2}$:

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \int_0^{\tan\frac{t}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\tan\frac{t}{2}} \frac{2\mathrm{d}x}{1-x^2} = \int_0^{\tan\frac{t}{2}} \left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

Il vient donc : $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = [-\ln|1-x|+\ln|1+x|]_0^{\tan\frac{t}{2}} = -\ln|1-\tan\frac{t}{2}|+\ln|1+\tan\frac{t}{2}|$. Or, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ nous assure que $1-\tan\frac{t}{2}>0$ et $1+\tan\frac{t}{2}>0$, on a donc :

$$\boxed{\int_0^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = -\ln\left(1-\tan\frac{t}{2}\right)+\ln\left(1+\tan\frac{t}{2}\right) = \ln\left(\frac{1+\tan\frac{t}{2}}{1-\tan\frac{t}{2}}\right).}$$

Remarque : il y a une erreur dans l'énoncé, il est écrit « on prend $t\in]-\pi;\pi[$ » cela devrait être $t\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. En effet, pour $t\in\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\}$ on a $\cos t=0$ et donc $\frac{1}{\cos t}$ qui n'existe pas.