PCSI, Mathématiques - Corrigé du DS 4, proposé le 14/12/2019

Exercice n° 1

1. Les solutions de l'équation homogène $y' - 3ty = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{\frac{3t^2}{2}}$ avec λ un paramètre réel. Une solution particulière de l'équation est la fonction constante $t \mapsto -\frac{2}{3}$, on en déduit que la solution générale est $\left\{t \mapsto -\frac{2}{3} + \lambda e^{\frac{3t^2}{2}} / \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Une fonction de cet ensemble vérifie la condition $y(0) = 1$ si, et seulement si $\lambda = \frac{5}{3}$. Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution cherchée est la fonction } t \mapsto -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}e^{\frac{3t^2}{2}}}$.

2. u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son polynôme caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$. Il existe donc deux réels λ et μ tels que, pour tout entier naturel n on ait : $u_n = \lambda(-1)^n + \mu n(-1)^n$. $u_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $u_1 = 1 \Leftrightarrow \mu = -1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{n+1}n$ et donc $\boxed{u_{2019} = 2019}$.

3. Soit $z \neq 0$. On fait apparaître la formule du binôme en faisant un changement de variable, puis une factorisation, puis en rajoutant un terme dans la somme :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} z^k = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i} z^{i-1} = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} z^i = \frac{1}{z}\left(-1 + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i\right) = \boxed{\frac{1}{z}\left(-1 + (z+1)^n\right)}$$

4. Pour tout réel x on a :
$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x = Re(e^{ix} - e^{2ix} + e^{3ix}) = Re(e^{2ix}(e^{-ix} + e^{ix} - 1)) = (2\cos x - 1)Re(e^{2ix}) = (2\cos x - 1)\cos 2x.$$
Il suit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0 \iff (2\cos x - 1)\cos 2x = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right.$.
On a, pour $x \in [0;\pi]$, $\cos 2x = 0 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \iff x \in \{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$ et $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$.
Finalement, $\boxed{\text{la solution de l'équation est } \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right\}}$.

Exercice n° 2

1. On calcule :
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \quad ; \quad f''(x) = \frac{1 \times 3}{2^2}x^{-\frac{5}{2}} \quad ; \quad f^{(3)}(x) = -\frac{1 \times 3 \times 5}{2^3}x^{-\frac{7}{2}}.$$
$\boxed{\text{On conjecture que, pour tout entier } n > 0, \text{ on a } f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{\prod_{i=0}^{n-1} 2i+1}{2^n} x^{-\frac{2n+1}{2}}}$.

2. On démontre la formule conjecturée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
   - **Initialisation** : pour $n = 1$ la formule est vraie (on l'a vu à la question 1).
   - **Hérédité** : supposons que la formule est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. $f^{(n+1)} = (f^n)'$ et on a donc, pour tout $x > 0$:
   $$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left((-1)^n \frac{\prod_{i=0}^{n-1} 2i+1}{2^n} x^{-\frac{2n+1}{2}}\right) = (-1)^n \frac{\prod_{i=0}^{n-1} 2i+1}{2^n} \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{2n+1}{2}}\right) \quad : (\star)$$
   Or, $\forall x > 0,\ \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{2n+1}{2}}\right) = (-\frac{2n+1}{2})x^{-\frac{2n+1}{2}-1} = (-\frac{2n+1}{2})x^{-\frac{2n+3}{2}}$.
   En remplaçant dans $(\star)$ on a : $\forall x > 0, f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{\prod_{i=0}^{n} 2i+1}{2^{n+1}} \times x^{-\frac{2n+3}{2}}$, la propriété est donc héréditaire.
   - **Conclusion** : $\boxed{\text{la propriété est vrai pour } n = 1, \text{ elle est héréditaire donc vraie pour tout } n > 1}$.

Exercice n° 3

1. f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et on a : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ f'(x) = \frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-x}{(1+x)^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(1) = 1 - \ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

2. On a : $\forall x \in]-1;+\infty[\setminus\{0\}, f(x) = \frac{2}{\frac{1}{x}+1} - \ln(1+x)$. Par opérations sur les limites on a $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

3. a) Pour $x > -1$, on pose $t = 1 + x$ et on a alors $f(x) = \frac{2(t-1)}{1+(t-1)} - \ln(1 + (t-1)) = \boxed{2 - \dfrac{2}{t} - \ln(t)}$.

   b) Pour $x > -1$ on a $f(x) = 2 - \frac{2+t\ln t}{t}$. Dire que x est dans un voisinage de 1^+ correspond à dire que t est dans un voisinage de 0^+, il suit que la limite de $f(x)$ en 1^+ est $\lim\limits_{t\to 0^+} 2 - \dfrac{2 + t\ln t}{t} = -\infty$.

   Finalement, $\boxed{\lim\limits_{t\to -1^+} f(x) = -\infty}$.

4. La fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$, on peut donc appliquer le TVI. D'après les variations de f, ainsi que ses limites qui sont résumés dans le tableau précédent, sachant que $f(1) = 1 - \ln 2 > 0$, il existe exactement deux solutions à l'équation $f(t) = 0$: une première a dans $]-1;1[$, une seconde b dans $]1;+\infty[$. On remarque que $f(0) = 0$, on en déduit $\boxed{a = 0}$.

5. Calculons, $f(4) = \frac{8}{5} - \ln 5 \simeq -0,01 < 0$. On en déduit que $\boxed{b \text{ est inférieur à } 4}$, mais probablement très proche de 4.

6. La tangente au point d'abscisse $a = 0$ a pour équation réduite $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ soit $\boxed{y = x}$.

7. Posons, pour $x > -1$, $g(x) = f(x) - x = \frac{2x}{1+x} - \ln(1 + x) - x$. On cherche à étudier le signe de g.
   g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et on a $\forall x > -1,\ g'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2} - 1 = \frac{-x(x+3)}{(1+x)^2}$. Le tableau de variations de g est donc de la forme :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(0)=0$	$\searrow$	

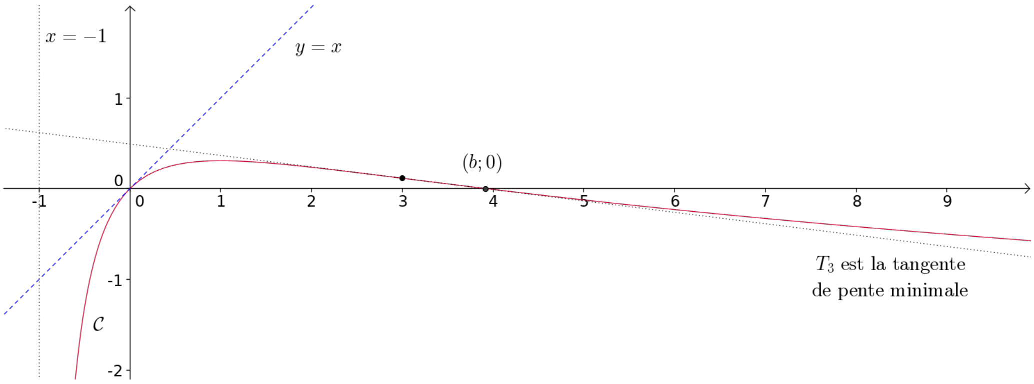
   On a donc, $\forall x > -1,\ g(x) \leq g(0) \iff g(x) \leq 0 \iff \boxed{f(x) \leq x}$

8. Pour tout $a > -1$, $\mathcal{C}$ admet une tangente au point d'abscisse a, soit T_a cette tangente. La pente de T_a est $f'(a) = \frac{1-a}{(1+a)^2}$. On cherche un minimum éventuel de $f'(a)$, on étudie donc ses variations.
   f' est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et on a :

$$\forall a > -1,\ f''(a) = \frac{-(1+a)^2 - 2(1+a)(1-a)}{(1+a)^4} = \frac{a-3}{(1+a)^3}.$$

   Sur $]-1;+\infty[$, $f''(a)$ a le signe de $a - 3$, on en déduit que $f'(a)$ admet un minimum pour $a = 3$.
   $\boxed{\text{Finalement, } \mathcal{C} \text{ admet une tangente de pente minimale au point d'abscisse } 3}$.

9. Sur la figure ci-dessous, on fait apparaître l'asymptote verticale $x = -1$, le point $(b, 0)$ avec b légèrement inférieur à 4, les tangentes $T_0 : y = x$, T_3 de pente minimale (son équation est $y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{2} - 2\ln 2$ mais elle n'est pas demandée).



Problème

Partie A

1. L'équation homogène associée à (E) est $(E_h) : y' - y = 0$, sa solution est $\boxed{\{x \mapsto \lambda e^x / \lambda \in \mathbb{R}\}}$.
2. On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)e^x$ avec λ une fonction dérivable. On a :
$$f \text{ est solution de } (E) \iff f' - f = \frac{x^n}{n!} \iff \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = \frac{x^n}{n!} \iff \lambda'(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$
La fonction $x \longmapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut donc poser $\lambda : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt$ qui est une primitive de $x \longmapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$. $\boxed{\text{Une solution particulière de } (E) \text{ est donc } x \longmapsto e^x \int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt}$.
3. L'ensemble des solutions de (E) est donc :
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \lambda e^x + e^x \int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt \;/ \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$
4. R_n est une somme finie de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut la dériver terme-à-terme : $\forall x \in \mathbb{R},\ R_n'(x) = e^x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$.
On vérifie alors que $\boxed{R_n \text{ est bien une solution de } (E).}$
5. On a $R_n(0) = e^0 - \sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!} = 0$. Il suit que R_n est l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$. D'après la question 3 on a donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = e^x \displaystyle\int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt}$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}^+, |R_n(x)| = |e^x \displaystyle\int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt| = e^x \int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt$ (les facteurs sont positifs puisque la fonction intégrée est positive et que les bornes de l'intégrale sont « dans le bon sens ».)
On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+,\ t^n e^{-t} \leq t^n$ et donc, par croissance de l'intégrale sur $[0; x]$ $(x \geq 0)$:
$$\int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
Il suit que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |R_n(x)| \leq \dfrac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}}$.
7. Soit α un réel positif. Tout d'abord, on a clairement : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{\alpha^n}{n!}$.
Majorons la suite : on a, $\forall n \geq 4,\ \dfrac{\alpha^n}{n!} = \dfrac{\alpha}{n} \times \dfrac{\alpha}{n-1} \times \cdots \times \dfrac{\alpha}{2} \times \dfrac{\alpha}{1}$.
Posons $N = \lfloor 2\alpha \rfloor + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $\frac{\alpha}{n} < \frac{1}{2}$.
On a : $\forall n \geq N, \dfrac{\alpha^n}{n!} \leq \dfrac{1}{2} \times \cdots \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\alpha}{N-1} \times \cdots \times \dfrac{\alpha}{1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N+1} \times \displaystyle\prod_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha}{k}$.
Or, $\prod_{k=1}^{N} \frac{\alpha}{k} = \frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}$ est une constante et donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N+1} \times \prod_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Finalement, $\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et majorée par une suite qui converge vers 0, le Théorème des Gendarmes nous permet de conclure : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$.
D'après la question précédente, on a $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or, $R_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, on en déduit donc que $\boxed{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x}$.

Partie B
On considère à présent deux suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc u est strictement croissante.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ donc v est strictement décroissante.
2. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a déjà vu que u est croissante et v décroissante donc u et v sont adjacentes.
3. u et v étant adjacentes, elles convergent vers un même réel ℓ.
La suite u étant strictement croissante, on a : $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ u_q < \ell$ et, de façon analogue, $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \ell < v_q$.
Finalement, on a bien : $\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^* u_q < \ell < v_q}$.
4. Supposons que ℓ soit rationnel, il est alors possible de l'écrire sous la forme d'un quotient $\ell = \dfrac{p}{q}$ avec p et q qui sont premiers entre eux. En multipliant par $q!$ l'inégalité de la question précédente, il vient $q!u_q < p(q-1)! < q!v_q$.
Or, $q!u_q = q! \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = q! + (q-1)! + \cdots + 1$ est un entier, notons le m. On a : $q!v_q = q!u_q + \frac{1}{q} = m + \frac{1}{q}$.
On a donc $p(q-1)! \in]m; m+\frac{1}{q}[$ ce qui est absurde car $p(q-1)!$ est entier et qu'il n'y a pas d'entiers dans $]m; m+\frac{1}{q}[$.
$\boxed{\ell \text{ est donc irrationnel}}$.
5. ℓ est la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1^k}{k!}$. Or, on a vu la partie A que cette suite converge vers $e^1 = e$.
La question précédente concluait à l'irrationnalité de ℓ et donc $\boxed{\text{e est irrationnel}}$.