Mathématiques - Correction du Devoir Maison 11

Exercice n° 1

Remarque : une coquille dans le sujet, je voulais écrire $x - y = 0$ et pas $x = y = 0$. Je corrige selon l'énoncé.

a) Montrons que F est un sous-espace vecotriel de $\mathbb{R}^4$. $\forall (x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x;y;z;t) \in F \iff (x;y;z;t) = (0;0;0;t) \iff (x;y;z;t) \in \mathrm{Vect}((0;0;0;1))$$

Finalement, $\boxed{F = \mathrm{Vect}((0;0;0;1))}$.

b) $((0;0;0;1))$ est génératrice de F, c'est une famille trivialement libre (une famille contenant un unique vecteur est liée si, et seulement si, ce vecteur est nul), c'est donc une base de F.
On pose $\boxed{\mathcal{B}_F = ((0;0;0;1))}$.

c) On complète $\mathcal{B}_F$ en une base de $\mathbb{R}^4$ en ajoutant $(1;0;0;0), (0;1;0;0)$ et $(0;0;1;0)$. On obtient ainsi une famille qui contient les vecteurs de la base canonique, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$ (mais ce n'est pas la base canonique car les vecteurs ne sont pas dans le même ordre).

d) La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre si, et seulement si, la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ a pour rang 3 (le nombre de colonnes). On échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En ayant fait les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ et enfin $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$.

Finalement, $\boxed{\text{la famille est libre}}$.

Remarques :

— la dernière matrice n'était pas nécessaire pour lire le rang (mais on avait annoncé qu'on échelonnait, on a donc été au bout du processus).

— On pouvait également partir de la définition de la liberté et essayer de voir si une combinaison linéaire nulle des vecteurs est nécessairement triviale ; on obtient la même matrice à échelonner.

e) La famille $(\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre, elle est donc une base de l'espace qu'elle engendre.
$\boxed{\text{La dimension de } G \text{ est donc } 3}$.

f) $F \cap G$ est un sous-espace de R^4, mais aussi de F et de G.
F est une droite vectorielle, on en déduit que $\dim F \cap G \in \{0;1\}$.

$\dim F \cap G = 1$ est équivalent à $F \cap G = F$ autrement dit $F \subset G$ c'est-à-dire $(0;0;0;1) \in G$.
Attention : on ne dit pas que $\dim F \cap G = 1$ *mais à quoi c'est équivalent.*
Pour savoir si $\dim F \cap G = 1$ ou non, on va décider si $(0;0;0;1) \in G$.

$$(0;0;0;1) \in G \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (0;0;0;1) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

Cette dernière équation est équivalente au système $\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma & = 0 \\ \alpha + 2\beta & = 0 \\ \alpha + 3\beta - \gamma & = 0 \\ \alpha + 4\beta & = 1 \end{cases}$ dont la matrice augmentée

est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$ dont la partie gauche est la matrice vue à la question d).

On fait les mêmes opérations que précédemment et on obtient comme matrice augmentée équivalente : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. La dernière ligne correspond à une équation sans solution, on en déduit que $(0;0;0;1) \notin G$, ce qui est équivalent à dire que $\boxed{\dim F \cap G = 0}$.

Remarque : on pouvait également se dire que $(0;0;0;1) \in G$ si, et seulement si, la famille $(\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, (0;0;0;1))$ est liée. On regarde alors le rang de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $(\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, (0;0;0;1))$... c'est-à-dire la même matrice que ci-dessus, sauf que la colonne augmentée devient une colonne « normale ».

g) On applique la formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = 1+3-0 = 4$. Il suit que $F+G$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ qui a la dimension de $\mathbb{R}^4$, c'est donc $\mathbb{R}^4$ lui-même. Finalement, $\boxed{F+G = \mathbb{R}^4}$.

h) Puisque $F+G = \mathbb{R}^4$ et que $\dim F\cap G = 0$ on peut conclure que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$: $\boxed{\text{tout vecteur de } \mathbb{R}^4 \text{ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de } F \text{ et d'un vecteur de } G}$.

Exercice n° 2

.

a) $E = \{P \in \mathbb{C}_3[X] \ / \ (X^2+1)|P\}$ contient 0 et, si P et Q sont deux polynômes de E, c'est-à-dire divisibles par X^2+1 alors toute combinaison linéaire de P et Q sera aussi divisible par X^2+1 et donc dans E. Finalement, E est non vide et stable par combinaisons linéaires, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_3[X]$. $\mathbb{C}_3[X]$ étant de dimension finie, E l'est également.

Déterminons une base de E. Soit $P \in E$; P est scindé sur $\mathbb{C}$, il admet i et $-$i pour racines, il est donc de la forme $P = (X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})(aX+b)$ avec a et b deux complexes *(si $a \neq 0$, c'est le coefficient dominant de P et $-\frac{b}{a}$ est la racine manquante ; si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors b est le coefficient dominant de P, si $a = b = 0$ alors $P = 0$).*
On a donc $P = (X^2+1)(aX+b) = aX(X^2+1) + b(X^2+1)$, on en déduit que $(X(X^2+1), X^2+1)$ est une famille génératrice de E. Comme elle est échelonnée en degré elle est aussi libre et c'est une base de E. Finalement, $\boxed{\mathcal{B} = (X(X^2+1), X^2+1) \text{ est une base de } E}$.

b) On Complète $\mathcal{B}$ en une famille échelonnée et donc libre : $\mathcal{B}' = (X(X^2+1), X^2+1, X, 1)$.
Ainsi définie, $\mathcal{B}'$ est une famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{C}_3[X]$ dont la dimension est 4, c'en est donc une base.
Finalement, $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{C}_3[X]}$.

c) On a : $\mathcal{B}' = (X(X^2+1), X^2+1, X, 1)$ et $\mathcal{B}_{\text{can}} = (1, X, X^2, X^3)$. Ecrivons les polynômes de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ dans $\mathcal{B}'$ et déduisons leurs colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

— $1 = 0 \times X(X^2+1) + 0 \times (X^2+1) + 0 \times X + 1 \times 1$, sa colonne de coordonnées est donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

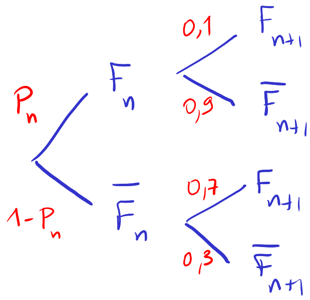
— $X = 0 \times X(X^2+1) + 0 \times (X^2+1) + 1 \times X + 0 \times 1$, sa colonne de coordonnées est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— $X^2 = 0 \times X(X^2+1) + 1 \times (X^2+1) + 0 \times X + (-1) \times 1$, sa colonne de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

— $X^3 = 1 \times X(X^2+1) + 0 \times (X^2+1) + (-1) \times X + 0 \times 1$, sa colonne de coordonnées est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 3

Il s'agit de probabilités conditionnelles. Un arbre est toujours salutaire.



Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'événement : F_n : « la personne fume le jour n ».

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_{n+1} = \mathbb{P}(F_{n+1})$. La formule de Bayes donne :

$$P_{n+1} = \mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1})\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1})\mathbb{P}(\overline{F_n}) = 0,1P_n + 0,7(1-P_n)$$

Finalement, $\boxed{\mathbb{P}_{n+1} = 0,7 - 0,6P_n}$ et $(P_n)_{n>0}$ est arithmético-géométrique.

Le point fixe de $x \mapsto 0,7 - 0,6x$ est $\frac{7}{16}$, la suite $(P_n - \frac{7}{16})_{n>0}$ est géométrique de raison $-0,6$, elle converge donc vers 0 ce qui implique que $\boxed{(P_n)_{n>0} \text{ converge vers } \frac{7}{16}}$, la personne continuera donc de fumer.

Exercice n° 4

Coquille dans le sujet : il faut étudier les courbes au voisinage du point $(0;1)$ et pas au voisinage de l'origine.

Toutes les fonctions sont régulières au voisinage de 0 et admettent des développements limités. On les calcule :

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2) \qquad ; \qquad \mathrm{e}^{-x} \underset{0}{=} 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

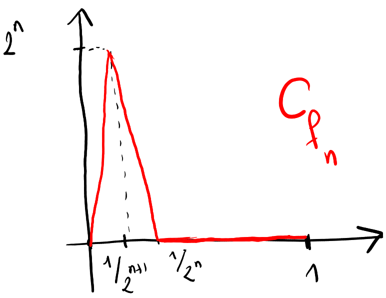
$$\sqrt{1 - 2\sin x} \underset{0}{=} 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad ; \qquad \cos(\sqrt{2}x) \underset{0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$$

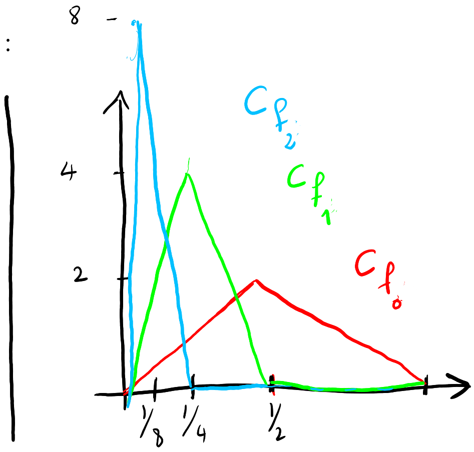
Les courbes $C_1 : y = \frac{1}{1+x}$, $C_2 : y = \sqrt{1 - 2\sin x}$, $X_3 : y = \mathrm{e}^{-x}$ ont donc la même tangente en $(0;1)$: $y = 1 - x$. Au voisinage de $(0;1)$, C_1 est au dessus, C_2 est au dessous et C_3 est entre C_1 et C_2.
$C_4 : y = \cos(\sqrt{2}x)$ admet-elle une tangente horizontale $y = 1$, elle croise donc les autres courbes, elle est en dessous à gauche de $(0;1)$ et au dessus à droite.

Exercice n° 5

Oui, c'est possible, comme l'illistre l'exemple ci-dessous :

Pour $n \geqslant 1$, f_n est définie par :





$\int_{[0;1]} f_n = 1$ (aire d'un triangle)

On a un "pic" de + en + haut et de + en + étroit.