

Corrigé PT 2016, épreuve C.

Partie I.

1(a) Le discriminant du trinôme $r^2 + br + c$ est $b^2 - 4c$, et ses racines sont donc $r_1 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c})$ et $r_2 = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c})$. Ce sont des racines réelles distinctes sous l'hypothèse $b^2 - 4c > 0$. Les relations coefficients-racines s'écrivent $c = r_1 r_2$ et $b = -(r_1 + r_2)$.

1(b) Soit y_i la fonction $t \mapsto e^{r_i t}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors, sur \mathbf{R} , $y_i' = r_i y_i$, $y_i'' = r_i^2 y_i$, et donc :

$$y_i'' + b y_i' + c y_i = r_i^2 y_i + b r_i y_i + c y_i = (r_i^2 + b r_i + c) y_i = 0,$$

puisque r_i est racine de $r^2 + br + c$. On a bien ainsi prouvé que pour $i \in \{1, 2\}$, la fonction $t \mapsto e^{r_i t}$ est solution de l'équation (\mathcal{E}_h) sur \mathbf{R} .

1(c) Soit y une solution de (\mathcal{E}_h) sur \mathbf{R} . Alors, par linéarité de la dérivation :

$$(y' - r_1 y)' - r_2 (y' - r_1 y) = y'' - r_1 y' - r_2 y' + r_1 r_2 y = y'' - (r_1 + r_2) y' + r_1 r_2 y \stackrel{(i)}{=} y'' + b y' + c y \stackrel{(ii)}{=} 0,$$

en utilisant pour (i) les relations coefficients-racines de la question 1(a), et l'hypothèse sur y pour l'égalité (ii).

1(d) Soit y une solution de (\mathcal{E}_h) sur \mathbf{R} . Alors, d'après la question la fonction $y' - r_1 y$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficient constant $Y' - r_2 Y = 0$, d'où l'existence de C_2 tel que $y'(t) - r_1 y(t) = C_2 e^{r_2 t}$ sur \mathbf{R} .

Par un calcul analogue à celui de la question 1(c), on montre $(y' - r_2 y)' - r_1 (y' - r_2 y) = 0$, et on en déduit comme ci-dessus l'existence de C_1 tel que $y'(t) - r_2 y(t) = C_1 e^{r_1 t}$ sur \mathbf{R} .

Bien entendu, les constantes C_1 et C_2 dépendent de la solution y choisie, et l'énoncé est donc erroné.

1(e) Toujours, pour y une solution de (\mathcal{E}_h) , la question précédente assure l'existence d'une constante C_1 telle que $y'(t) - r_1 y(t) = C_2 e^{r_2 t}$ sur \mathbf{R} . La fonction y est ainsi solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. L'équation homogène associée est $y' - r_1 y = 0$, l'espace de ses solutions est la droite $\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} / \lambda \in \mathbf{R}\}$. Au vu du second membre, une solution particulière peut être cherchée sous la forme $y_p(t) = \mu e^{r_2 t}$, et on obtient après substitution la condition $(r_2 - r_1) \mu e^{r_2 t} = C_2 e^{r_2 t}$, et après simplification par le facteur non nul $e^{r_2 t}$, la condition $r_1 \neq r_2$ (voir question 1(a)) assure l'existence d'un réel $\mu = \frac{C_2}{r_2 - r_1}$ tel que la solution y_p convienne.

Le théorème de structure des équations différentielles linéaires avec second membre assure alors que l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}_h) est :

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \frac{C_2}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} \mid (\lambda, C_2) \in \mathbf{R}^2 \right\},$$

ce qui s'écrit encore après changement de paramètre :

$$\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} / (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

1(f)(i) Dans le cas envisagé ici, le polynôme caractéristique de la question 1(a) devient $r^2 - 16 = (r-4)(r+4)$, on obtient donc $r_1 = -4$ et $r_2 = 4$, et l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}_h) est :

$$\{t \mapsto \lambda e^{-4t} + \mu e^{4t} / (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

1(f)(ii) L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à laquelle on a adjoint une condition initiale sur la valeur de la fonction et la valeur de sa dérivée constitue un problème de Cauchy (linéaire, d'ordre 2), qui admet donc une unique solution. On la calcule en partant de l'expression $y(t) = \lambda e^{-4t} + \mu e^{4t}$. La condition initiale $y(0) = 2e$ entraîne alors $2e = \lambda + \mu$, et la condition $y'(0) = 0$ entraîne $0 = -4\lambda + 4\mu$, soit encore $\lambda = \mu$, et donc $\lambda = \mu = e$ au vu de la première condition.

L'unique solution du problème de Cauchy considéré ici est donc la fonction $t \mapsto e^{1-4t} + e^{1+4t}$.

2(a) L'ensemble D est le domaine à droite de la parabole d'équation $x = \frac{1}{2}y^2$ (qui est dirigée par l'axe des abscisses).

2(b) Soit $(x, y) \in D$ et $(u, v) \in \Delta$. On considère l'équation $(x, y) = h(u, v)$:

$$(x, y) = h(u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 + y^2) \\ v = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 2x - y^2 \\ v = y \end{cases}.$$

Or, l'hypothèse $(x, y) \in D$ assure que $2x > y^2$, et donc, considérant que $u \in \mathbf{R}^{*+}$ (car $(u, v) \in \Delta$) :

$$(x, y) = h(u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt{x - \frac{1}{2}y^2} \\ v = y \end{cases} .$$

En définitive, h est bien une bijection entre Δ et D , dont la réciproque est $(x, y) \mapsto (\sqrt{2x - y^2}, y)$. L'application h est de classe C^1 car ses deux fonctions coordonnées sont de classe C^1 (en tant que fonctions polynomiales). De même, h^{-1} est de classe C^1 car ses fonctions coordonnées sont de classe C^1 (pour la première fonction, il convient de voir que la fonction racine carrée se compose avec une fonction à valeurs strictement positives sur le domaine considéré).

2(c) Calculons la dérivée partielle première de ψ par rapport à u en fonction des dérivées partielles de φ . En notant h_1 et h_2 les fonctions coordonnées de h , pour $(u, v) \in \Delta$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)) \frac{\partial h_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(h(u, v)) \frac{\partial h_2}{\partial u}(u, v) \\ &= u \frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)). \end{aligned}$$

Puis la dérivée partielle seconde de ψ par rapport à u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)) + u \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(h(u, v)) \frac{\partial h_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(h(u, v)) \frac{\partial h_2}{\partial u}(u, v) \right] \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)) + u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(h(u, v)). \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \psi \text{ est solution de } (E') \text{ sur } \Delta &\Leftrightarrow \forall (u, v) \in \Delta, \frac{\partial^2}{\partial u^2}(u, v) - 16\psi(u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (u, v) \in \Delta, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)) + u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(h(u, v)) - 16\varphi(h(u, v)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in D, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + (2x - y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) - 16\varphi(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi \text{ est solution de } (E) \text{ sur } D. \end{aligned}$$

On a bien établi l'équivalence souhaitée.

2(d) Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions de la forme $(u, v) \mapsto \lambda(v)e^{4u} + \mu(v)e^{-4u}$, au vu des résultats de la question 1 (en travaillant à v fixé, les constantes d'intégration dépendent de v , et le caractère C^2 assure le caractère C^2 des fonctions λ et μ ainsi obtenues).

Les solutions de l'équation (E') sont alors les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \lambda(y)e^{4\sqrt{2x-y^2}} + \mu(y)e^{-4\sqrt{2x-y^2}}$, avec λ et μ des fonctions de classe C^2 sur \mathbf{R} .

Partie II.

1. On procède par analyse/synthèse.

Analyse. Supposons d'abord l'existence de α et β réels tels que $x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha(1 + \beta^2(x + \lambda)^2)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Alors, toujours pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha + \alpha\beta^2(x^2 + 2\lambda x + \lambda^2) = \alpha\beta^2 x + 2\lambda\alpha\beta^2 x + \alpha + \alpha\beta^2 \lambda^2,$$

et donc, par liberté de la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$, on obtient le système suivant qu'on résout :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 = \alpha\beta^2 \\ 2\lambda = 2\lambda\alpha\beta^2 \\ \mu = \alpha + \alpha\beta^2\lambda^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha\beta^2 \\ 2\lambda = 2\lambda \\ \mu = \alpha + \lambda^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha\beta^2 \\ \alpha = \mu - \lambda^2 \end{cases} \\ &\stackrel{\lambda^2 - \mu < 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} |\beta| = \frac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}} \\ \alpha = \mu - \lambda^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Synthèse. On pose $\alpha = \mu - \lambda^2$, et, en utilisant l'hypothèse $\lambda^2 - \mu < 0$, on pose $\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}}$, et on vérifie facilement que l'égalité $x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha(1 + \beta^2(x + \lambda)^2)$ est satisfaite pour tout $x \in \mathbf{R}$ en développant le membre de droite.

2. L'expression établie à la question 1 montre que $x^2 + 2\lambda x + \mu$ est à valeurs strictement positives sur \mathbf{R} (car $\alpha = \mu - \lambda^2$ est strictement positif par hypothèse, et $1 + \beta^2(x + \lambda)^2 \geq 1 > 0$), donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 2\lambda x + \mu)^{n+1}}$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, donc est continue sur \mathbf{R} .

De plus, au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$:

$$\frac{1}{(x^2 + 2\lambda x + \mu)^{n+1}} = \frac{1}{x^{2n+2}} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^2}\right)^{n+1}} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n+2}},$$

et, puisque $n \in \mathbf{N}$, $2n+2 \geq 2 > 1$, donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{2n+2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$. D'après le théorème de comparaison, il en est donc de même de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 2\lambda x + \mu)^{n+1}}$, qui est donc, au vu de sa continuité, intégrable sur \mathbf{R} .

En tant qu'intégrale d'une fonction intégrable, l'intégrale I_n est convergente.

Pour calculer I_0 , on utilise la question 1 pour mettre le dénominateur sous forme canonique, puis on utilise le changement de variable affine $u = \beta(x + \lambda)$ (avec le réel β obtenu à la question 1 qui est strictement positif), et on trouve, l'intégrale I_0 étant convergente :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\alpha(1 + \beta^2(x + \lambda)^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\alpha\beta(1 + u^2)} = \frac{1}{\alpha\beta} [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\alpha\beta} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu - \lambda^2}}.$$

3(a) Dans le cas considéré, l'intégrale I_n devient :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}}.$$

On intègre alors par parties en intégrant le facteur 1 et en dérivant $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$ (qui sont de classe C^1 sur \mathbf{R} , en tant que constante et fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas), et en remarquant que les termes intégrés proviennent de $\frac{x}{(x^2+1)^{n+1}}$ qui admet des limites finies (et même nulles) en $\pm\infty$. Ainsi :

$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^{n+1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2(n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+2}} dx = (2n+2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+2}} dx = (2n+2)(I_n - I_{n+1}),$$

en utilisant pour la dernière égalité la linéarité pour les intégrales convergentes. On déduit de ce qui précède, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(2n+2)I_{n+1} = (2n+1)I_n,$$

et donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

3(b) Dans le cas considéré, l'expression de I_0 devient $I_0 = \pi$. La suite $(I_n)_n$ satisfait une relation de récurrence linéaire de pas 1, son premier terme est connu, on prouve facilement par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$I_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i+1)}{\prod_{i=1}^n (2i)} I_0,$$

et par un calcul classique consistant à intercaler des facteurs pairs au numérateur pour faire apparaître un nombre factoriel :

$$I_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i+1) \prod_{i=1}^n (2i)}{(\prod_{i=1}^n (2i))^2} \pi$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \pi.$$

Partie III.

1. L'équation considérée est une équation trinôme du second degré, de discriminant $1 - 4x$, qui est positif sous l'hypothèse $|x| \leq \frac{1}{4}$. Ses solutions sont $\mathcal{Y}_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x})$ et $\mathcal{Y}_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4x})$.

2. La fonction considérée est définie là où $1 - 4x$ est positif, c'est-à-dire sur l'intervalle $] -\infty, \frac{1}{4}]$.

3. Le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est :

$$\forall x \in] -1, 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i)}{n!} x^n.$$

Il est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (égal à 1 dès que $\alpha \notin \mathbf{N}$).

4. En appliquant le résultat de la question 3 avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et x réel tel que $|4x| < 1$ (autrement dit $x \in] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$), on obtient :

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - i)}{n!} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 4^n \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - i)}{n!} x^n,$$

et donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 4^n \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - i)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n \prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - i)}{2 \times n!} x^n.$$

On a ainsi obtenu le développement en série entière de f sur $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et les coefficients :

$$S_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*, S_n = \frac{(-1)^{n+1} 4^n \prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - i)}{2 \times n!}.$$

De plus, $\frac{1}{4}$ est bien le rayon de convergence R de ce développement : le calcul ci-dessus montre que $R \geq \frac{1}{4}$, et réciproquement, en partant du développement de f pour $|x| < R$, on obtient par un calcul analogue le développement de $\sqrt{1-4x}$, dont on sait qu'il est de rayon $\frac{1}{4}$, ce qui montre l'inégalité réciproque $R \leq \frac{1}{4}$. Le domaine sur lequel le développement de f est valide est donc $\mathcal{D}_S =] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ (conformément au programme, on ne s'intéresse pas à la convergence aux extrémités de l'intervalle ouvert de convergence sans demande explicite).

5. Soit deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$. Leur produit de Cauchy est :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Si R_a et R_b désigne les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$, alors le rayon de convergence de leur produit (de Cauchy) est supérieur ou égal à $\max\{R_a, R_b\}$.

6. D'après la question III.1, et la définition de la fonction f , cette fonction est solution sur $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ de

l'équation $\mathcal{Y}^2 - \mathcal{Y} - x = 0$. Ainsi, au vu du développement en série entière de f , pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \right) - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n + x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n S_k S_{n-k} \right) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n + x \\ &\stackrel{S_0=0}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} S_k S_{n-k} \right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n + x \\ &= (1 - S_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} S_k S_{n-k} - S_n \right) x^n, \end{aligned}$$

et donc, par unicité du développement en série entière, pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k S_{n-k}$ (et $S_1 = 1$).

7. On reprend l'expression obtenue à la question 4, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(-1)^{n+1} 4^n \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - i\right)}{2 \times n!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 4^n \prod_{i=0}^{n-1} (1 - 2i)}{2 \times 2^n n!} \text{ (en multipliant chaque facteur par 2)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 4^n (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (2i - 1)}{2^{n+1} n!} \text{ (le facteur d'indice } i = 0 \text{ vaut 1)} \\ &= \frac{2^{n-1}}{n!} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (2i - 1) \prod_{i=1}^{n-1} (2i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (2i)} \text{ (comme en II.3(b))} \\ &= \frac{2^{n-1}}{n!} \frac{(2n - 2)!}{2^{n-1} (n - 1)!} \\ &= \frac{1}{n} \frac{(2n - 2)!}{((n - 1)!)^2} \\ &= \frac{1}{n} \binom{2n - 2}{n - 1}, \end{aligned}$$

et l'expression demandée est établie.

8. La série de terme général S_n est obtenue en évaluant le développement en série entière de f en $x = 1$. Or, on a établi que ce développement a pour rayon de convergence $1/4$: la série diverge donc grossièrement en $1 > 1/4$. On a établi que la série de terme général S_n est divergente.

9(a) Comme indiqué dans l'énoncé, $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$.

On écrit tous les mots de Dyck de longueur 6 (en suivant l'ordre alphabétique pour s'assurer de n'en oublier aucun) :

$$\text{AAABBB, AABABB, AABBAB, ABAABB, ABABAB,}$$

et donc $C_3 = 5$. Enfin, les mots de Dyck de longueur 8 sont :

$$\text{AAAABBBB, AAABABBB, AAABBABB, AAABBBAB, AABAABBB, AABABABB, AABABBAB,}$$

$$\text{AABBAABB, AABBABAB, ABAAABBB, ABAABABB, ABAABBAB, ABABAABB, ABABABAB,}$$

et donc $C_4 = 14$.

9(b) À chaque mot de Dyck M de longueur $2n$, on associe l'entier naturel $k(M)$ défini comme le maximum des entiers strictement inférieurs à $2n$ tels que le préfixe de M de longueur k contienne autant de A que de B . Ce maximum est bien défini car 0 est un tel entier naturel, et par définition $0 \leq k < 2n$. On remarque aussi que k est forcément pair : on le note dorénavant $2\ell(M)$ avec donc $\ell(M)$ entier tel que $0 \leq \ell \leq n - 1$.

Pour chaque n entier naturel non nul, notons \mathcal{D}_n l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$. On obtient alors :

$$\mathcal{D}_n = \bigcup_{l=0}^{n-1} \{M \in \mathcal{D}_n / \ell(M) = l\}.$$

Cette réunion est disjointe par définition de ℓ . Pour chaque l entier compris entre 0 et $n - 1$, notons $\mathcal{D}_{n,l} = \{M \in \mathcal{D}_n / \ell(M) = l\}$. On obtient alors des bijections :

$$\sigma_0 : \mathcal{D}_{n,0} \rightarrow \mathcal{D}_{n-1}, \quad \forall l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \sigma_l : \mathcal{D}_{n,l} \rightarrow \mathcal{D}_l \times \mathcal{D}_{n-l,0},$$

définies comme suit (dans ce qui suit, on note $M[k]$ le caractère en position k du mot M , et $M[k1 : k2]$ le sous-mot constitué des caractères entre les positions $k1$ et $k2$ comprises) :

- pour $n \geq 2$, à un mot de Dyck $M \in \mathcal{D}_{n,0}$, on associe le sous-mot $M' = M[2 : 2n - 1]$ constitué des caractères des positions 2 à $2n - 1$, qui est de longueur $2n - 2$, et qui est un mot de Dyck. En effet, pour tout k compris entre 1 et $2n - 2$, le sous-mot $M'[1 : k]$ est égal à $M[2 : k + 1]$, soit encore le sous-mot $M[1 : k + 1]$ privé du A initiale. Puisque M est un mot de Dyck, le nombre de A dans $M[1 : k + 1]$ est supérieur ou égal au nombre de B , et puisque $M \in \mathcal{D}_{n,0}$, la différence est stricte, et donc, une fois le A initial retiré, le nombre de A dans $M[2 : k + 1] = M'[2 : k]$ reste supérieur au nombre de B . L'application σ_0 est donc bien définie de $\mathcal{D}_{n,0}$ à valeurs dans \mathcal{D}_{n-1} . On vérifie facilement qu'il s'agit d'une bijection en construisant la réciproque, consistant à adjoindre à un mot de Dyck de longueur $2n - 2$ un A initial et un B final. La bijectivité de σ_0 assure ainsi :

$$\#\mathcal{D}_{n,0} = \#\mathcal{D}_{n-1} = C_{n-1},$$

et la relation est encore vraie pour $n = 1$ puisque $\mathcal{D}_{n,0} = \mathcal{D}_n$ par définition, et donc est de cardinal 1, et $C_0 = 1$ par hypothèse.

- pour $l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et $M \in \mathcal{D}_{n,l}$, on vérifie facilement que $M[1 : 2l]$ et $M[2l + 1 : 2n]$ sont encore des mots de Dyck, et la maximalité de l permet facilement de s'assurer que $M[2l + 1 : 2n]$ appartient à $\mathcal{D}_{n-l,0}$. On a ainsi indiqué la construction de l'application σ_l , et la réciproque est simplement l'application de concaténation d'un mot de Dyck de longueur $2l$ et d'un mot de Dyck de longueur $2(n - l)$ en lequel la fonction ℓ s'annule.

La bijectivité de σ_l assure ainsi :

$$\#\mathcal{D}_{n,l} = \#\mathcal{D}_l \times \#\mathcal{D}_{n-l,0} = C_l C_{n-l},$$

la dernière égalité provenant du point précédent.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} C_n = \#\mathcal{D}_n &= \sum_{l=0}^{n-1} \#\mathcal{D}_{n,l} \text{ (cardinal d'une réunion disjointe)} \\ &= C_{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1} C_l C_{n-l} \text{ (en isolant le terme d'indice } l=0) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} C_l C_{n-l} \text{ (car } C_0 = 1) \\ &= \sum_{k=1}^n C_{n-k} C_{k-1} \text{ (par changement d'indice } l = n - k). \end{aligned}$$

9(c) Les deux suites $(C_n)_n$ et $(S_{n+1})_n$ coïncident au rang $n = 0$ (car $C_0 = 1 = S_1$), et, d'après les questions 9(b) d'une part, et 6 d'autre part (avec le même changement d'indice qu'à la fin de la question 9(b)), satisfont une même relation de récurrence forte. D'après le principe de récurrence forte, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $C_n = S_{n+1}$.

Au vu de la question 7, on a montré que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le nombre de mots de Dyck de longueur $2n$ est :

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Cela correspond aux résultats de la question 9a pour $n = 3$ et $n = 4$.