Exercice 10 *Nombres complexes*

Soit $\theta \in]0, \pi/4[$

1. Placer dans le plan complexe les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$, $z_B = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}$, $z_C = \mathrm{e}^{\mathbf{i}(\pi-\theta)}$.
   Les points sont sur le cercle trigonométrique : on passe de A à B par symétrie par rapport à (Ox) et B à C sont diamétralement opposés (π radians égale 180 degrés, le demi-tour !).
2. $|z_A| = |\mathrm{e}^{i\theta} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 = |z_B| = |z_C| = 1$ par Pythagore ou le cours de PCSI.
3. Faites de la trigo $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
   Ainsi
   $|z_B - z_A|^2 = |2\cos\theta|^2 = 4\cos^2\theta$
   $|z_C - z_B|^2 = 2^2 = 4$
   $|z_A - z_C|^2 = |2\sin\theta|^2 = 4\sin^2\theta.$
   $|z_A - z_C|^2 + |z_B - z_A|^2 = 4 = |z_C - z_B|^2$ Par Pythagore le triangle est rectangle en A!!! (énoncé douteux..., le dessin est parlant).
4. $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$ représente la mesure de l'angle $\hat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$
   Par un calcul complexe en factorisant,
   $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-i\theta}}{}$

Exercice 11 *Suites adjacentes*

1. Rappeler le théorème des suites adjacentes :
   Soient deux suites réelles, (a_n) croissante, (b_n) décroissante telles que $|b_n - a_n| \longrightarrow 0$. Alors les deux suites admettent une limite finie et cette limite ℓ est commune et vérifie $\forall n, a_n \leq \ell \leq b_n$
2. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.
   (a) Justifier que $u_n > 0$ si et seulement si n est pair.
   (b) $A_{N+1} - A_N = u_{2N+1} + u_{2N} \geq 0$ car $u_{2N+1} \leq 0 \leq u_{2N}$ et
   $|u_{2N+1}| \leq |u_{2N}$.
   Donc (A_n) croissante.
   De même $B_{N+1} - B_N = u_{2(N+1)} + u_{2N+1} = u_{2N+2} + u_{2N+1} \geq 0$ (B_n) croissante.
   (c) $|B_N - A_N| = u_{2N}$ tend vers 0, on applique les suites adjacentes.
   (d) Ainsi (A_N) et (B_N) convergent vers une même limite finie L.
   (e) On reconnait les sommes partielles $(A_N) = (S_{2N+1})$ d'indices impairs et $(B_N) = (S_{2N})$ d'indices pairs
   où $S_N = \displaystyle\sum_{k=2}^{N} u_k$
   $S_{2N} = \displaystyle\sum_{k=2}^{2N} u_k$ etc
   La convergence de (S_{2N}) et (S_{2N+1}) implique la convergence de la suite des sommes partielles $(S_p)_{p\geq 2} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k\right)_{p\geq 2}$ vers une limite finie L.
   En reformulant en termes de séries numériques, la série numérique

$\sum_{k\geq 1} u_k$ est convergente et sa somme est le nombre fini

$L = \lim_{p\to+\infty} S_p = \lim_{p\to+\infty} sum_{k=2}^{p} u_k$. Se nombre est appelé "somme" de la série convergente $\sum_{k\geq 1} u_k$ est se note avec la notation suivante :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} = L = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=2}^{p} u_k}$$

Exercice 12 *Encadrements*

1. (a) $\sin t \underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$

   (b) $\frac{\sin t - t}{(\sin t)^3} \underset{t\to 0}{=} \frac{-\frac{t^3}{3!} + o(t^3)}{(t+o(t))^3} = \frac{-\frac{t^3}{3!} + o(t^3)}{t^3 + o(t^3)} = -\frac{1}{6} + o(1) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-1}{6}$.
   Il s'agit de la limite fine en 0.

   (c) La fonction $f\ :]0,\pi/2] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{\sin t - t}{(\sin t)^3}$ peut donc être prolongée par continuité en 0 (en un fonction $\tilde{f}$ continue sur $[0,\pi/2]$) en posant
   $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\tilde{f}(t) = f(t)$ et $\tilde{f}(0) = \frac{-1}{6}$
   D'après le théorème de prolongement de PCSI.

2. (a) $\ln u \underset{u\to 0}{=} 0 + u + o(u)$

   (b) $\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + o(1/n)$

   (c) $\alpha^\beta = \mathrm{e}^{\beta\ln\alpha}$

   (d) $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{a}{n}+o(1/n)\right)} = \mathrm{e}^{a+o(1)} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^{o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^a \times 1 = \mathrm{e}^a$
   Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$

   (e) On a $\lim_{n\to} 1 + \frac{a}{n} = 1$ et $\lim_{n\to} 1^n = 1$.
   On ne sait pas faire des produits infinis de limite et on il était difficile de s'attendre à avoir $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \neq \lim_{n\to} \left(\lim_{n\to} 1 + \frac{a}{n}\right)^n$

3. (a) On fait le quotient
   $\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\ln n}{n^{1/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.
   Ainsi $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

   (b) La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car 3/2>1 (critère de Riemann)

Par théorème de comparaison (via le petit o) on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

(a) $Q_n = \left|\frac{\frac{n^a}{\mathrm{e}^n}}{\frac{1}{n^2}}\right| = n^{a-2}\mathrm{e}^{-n} = \mathrm{e}^{(a-2)\ln n - n} = \mathrm{e}^{-n(1+(2-a)\ln n/n)}$.
Or par croissances comparées $\ln n/n \longrightarrow 0$ Donc $-n(1+(2-a)\ln n/n) \longrightarrow -\infty$ par produit de limites, et comme $\mathrm{e}^t \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$, par composition de limites $Q_n \longrightarrow 0$ et
$\frac{n^a}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(b) La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison entre séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^a}{\mathrm{e}^n}$ converge

(a)

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
$\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}}{3^n} = \gamma^n$ avec $\gamma = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}}{3}$.
On a $\gamma \neq 1$ et même $|\gamma| = \frac{1}{3} < 1$ ce qui assurera la convergence de la série géométrique $\sum \gamma^n$

(c)

(d) Comme $|\gamma| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \gamma^n$ converge.
Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k=n}^{m} \gamma^k = \frac{\gamma^n - \gamma^{m+1}}{1-\gamma}$ (vrai si $\gamma \neq 1$) et ici $\lim \gamma^p = 0$ car $|\gamma| < 1$
Donc la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \gamma^n$ converge et sa limite est $L = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-\gamma^{N+1}}{1-\gamma} = \frac{1}{1-\gamma} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}}/3$
On pourrait simplifier en factorisant les différences de complexes avec une exponentielle faisant intervenir la demi-somme des arguments...

4. (a) 1) $\sum_{n=0}^{N} u_n$ b) somme partielle
2) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ c)somme (on sait que c'est une valeur finie égale à la limite de la suite des sommes partielles).
3) $\sum_{n\geq 0} u_n$ a) série (c'est un objet abstrait, pas un nombre, qui désigne une infinité de nombres réels, et l'on ne sait pas si elle converge ou non et l'on ne calcule pas avec $=$ dans une relation entre réels, car ce n'en est aps un!!!)

Exercice 13 *Espaces euclidiens*

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique $(\ |\ )$.

1. Orthonormalisez par le procédé de Gram-Schmidt la famille de vecteurs (u, v, w)
   avec
   $u = (1, 0, 1), v = (1, 1, 1), w = (-1, 1, 0)$.
   Allez-y par vous même !
2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - z = 0\}$ Justifier que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
   On peut le faire à la main en vérifiant que F est non vide car contient $(0, 0, 0)$puis stable par combinaison linéaire (pour $(a, b, c), (d, e, f) \in F et \lambda \in \mathbb{R}$ on vérifie par un calcul que $(a, b, c)+(d, e, f)\lambda = (a+\lambda d, ..., c+\lambda f)$ appartient à F car en vérifie l'équation
   Sinon comme $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto$ est une application linéaire (et même une forme linéaire, on remarque que $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ par propriété du cours.
3. $1 + (-1) = 0$ donc u et v appartiennent à F.
4. En déduire une base orthonormée de F.
   Par le théorème du rang $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ l'espace de départ de φ est égale à $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) + \dim(\mathrm{im}\varphi)$
   C'est à dire $3 = \dim F + 1$ car φ forme linéaire non nulle est surjective (tout réel x a pour antécédent par φ le vecteur $\alpha = (x, 0, 0)$ ou un autre par exemple, et $\mathrm{rg}\,\varphi = 1$
   Ainsi comme (u, v) libre car ce sont **DEUX** vecteurs non colinéaires (l'argument est faux pour 3 ou plus faites la liberté à la main), donc $F \supset \mathrm{Vect}(u, v)$ et par égalité des dimensions,
   $F = \mathrm{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ et une base de F est la familel $B_F = (u, v)$.
5. Le vecteur w n'appartient pas à F car il ne vérifie pas l'équation cartésienne.
   Au passage en notant le vecteur $n = (1, 0, -1)$, un vecteur t=(x,y,z) vérifie les équivalences (avec el produit scalaire usuel $<\ ,\ >$:
   $t \in F \iff x - z = 0 \iff x \times 1 + y \times 0 + z \times (-1) =< (x, y, z), (1, 0, -1) >= 0 \iff < t, n >= 0 \iff t \perp n.$
   Ainsi F **est le plan vectoriel orthogonal à** n !
6. On trouve une base orthonormée $\mathcal{B}_{GS} = (e_1, e_2)$ de F via l'algorithme de Gram-Schmidt.
   D'après le cours de PCSI la distance $d(w, F)$ de w à F est donné à l'aide du théorème de projection orthogonal, avec $p_F(w) =< w, e_1 > e_1+ < w, e_2 > e_2$ le projeté orthogonal de w sur F par la formule,
   $d(w, F) = d(w, p_F(w)) = \|w - p_F(w)\| = \|w- < w, e_1 > e_1- < w, e_2 > e_2\|$ qui se calcule fastidieusement.
   Toutefois,
   $\mathbb{R}^3 = F + F^{\perp}$ avec $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(n) = D$ droite dont une base orthonormée est $\tilde{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$
   On a $\|w - p_F(w)\| = \|p_{F^{\perp}}(w)\| = \| < w, \tilde{n} > \tilde{n}\|$
7.

Indications