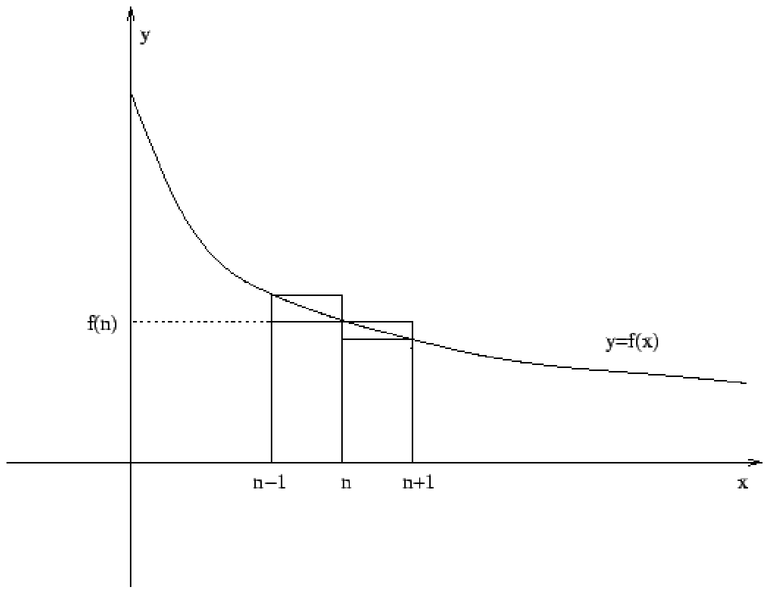
II. Du 16 au 31 juillet : révisions d'analyse

Exercice 3 *Séries numériques*

1. Par décroissance de f, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [n, n+1]$, on a :

$$\boxed{f(n) \geq f(t) \geq f(n+1)}$$

2. Représentation graphique :



3. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_n^n f(n+1)\,\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t$$

Or les deux intégrales extérieures sont des intégrales de fonctions constantes et se calculent comme des aires de rectangles de largeur $(n+1-n)$:

$$f(n)\int_n^{n+1} 1\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(n+1)\int_n^{n+1} 1\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\boxed{f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(n+1)}$$

4. En sommant les inégalités précédentes por n de 2 à N, on a :
$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \geq \sum_{n=2}^{N}\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{n=2}^{N} f(n+1)$$
Soit par la relation de Chasles :
$$S_N \geq \int_2^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{\ell=3}^{N+1} f(\ell)$$

soit
$S_N \geq I_{N+1} \geq S_{N+1} - f(2)$
On en déduit $\boxed{S_N \geq I_{N+1}}$ et $\boxed{I_N \geq S_N - f(2)}$

5. L'ingéalité de gauche donne bien $S_N \geq I_{N+1}$.
L'inégalité de droite pour l'indice $N-1$ donne elle $I_{N-1+1} \geq S_{N-1+1} - f(2)$
Ainsi $\boxed{f(2) + I_N \geq S_N \geq I_{N+1}}$

6. La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.
On a pour tout $t > 1$: $f'(t) = \dfrac{-\ln t(2 + \ln t)}{(t^2 \ln(t))^2} = \dfrac{-(2 + \ln t)}{t^4(\ln(t))^3} < 0$
Ainis f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

7. Le changement de variable $\ln t = u$ est valide car $t \mapsto \ln t$ réalise une bijection monotone de classe $\mathcal{C}^1$ de $[2, N]$ vers $[\ln 2, \ln N]$:
On a $t = \mathrm{e}^u$ de sorte que $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u$
Ainsi
$I_N = \displaystyle\int_2^N f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^N \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln N} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \left[-u^{-1}\right]_{\ln 2}^{\ln N} = \frac{-1}{\ln N} - \frac{-1}{\ln 2}$
$\boxed{I_N = -\dfrac{1}{\ln N} + \dfrac{1}{\ln 2}}$.

8. On a donc $\boxed{\lim I_N = \dfrac{1}{\ln 2}}$
La majoration $S_N \leq I_N + f(2)$ assure que la suite (S_N) est majorée.
Comme $S_{N+1} - S_N = f(N+1) \geq 0,\ \forall N \geq 2$, la suite (S_N) est croissante.
Ainsi la suite (S_N) est croissante et majorée donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.
Ainsi $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N$ existe et est finie, et par la majoration,
$\lim S_N \leq \lim I_N = \dfrac{1}{\ln 2}$

9. La série numérique $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est une série à termes positifs.
D'après la condition nécessaire et suffisante de convergence des séries à termes positives, cette série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $(S_N)_{N \geq 2}$ est majorée.
D'après la question précédente, on en déduit que la $\boxed{\text{série } \displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ converge}}$, et que sa somme est

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = \lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^2}}$$

Exercice 4 *Intégration et dérivation*

1. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, toute primitive F sur I intervalle de f continue vérifie : $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I}$ donc est dérivable (de dérivée $F' = f$).
   On sais même que F a pour expression $F : x \longmapsto F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. D'après le théorème fondamental, on a $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
3. $g : t \longmapsto \dfrac{(\operatorname{ch} t)^{-2}}{-2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\operatorname{ch} t \neq 0 \forall t$.
   $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t^{-3}$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{sh} t}{(\operatorname{ch} t)^3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\operatorname{ch} t)^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \frac{(\operatorname{ch} 2)^{-2}}{-2} + \frac{(\operatorname{ch} 2)^{-2}}{2}.$