IV. Du 1 au 15 août : révisions de probabilités

Exercice 7 *Dénombrements et évènements*

1. La probabilité d'obtenir une face rouge au premier lancer vaut $2/3$ via la loi uniforme sur les 6 faces du dé.
2. On note R_1 obtenir rouge au premier lancer, R_2 obtenir rouge au 2ème lancer. et A l'évènement avoir le dé A.
   On veut calculer $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(A) = \dfrac{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap A)}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)}$
   (on reconnaît la formule de Bayes)
   Or par les probabilités totales sur le s.c.e. $(A, \overline{A})$,
   on a $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(R_1 \cap R_2) + \mathbf{P}(\overline{A}) \times \mathbf{P}_{\overline{A}}(\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)$
   Numériquement, on trouve $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(A) = \dfrac{2/3 * 2/3 * 1/2}{2/3 * 2/3 * 1/2 + 1/3 * 1/3 * 1/2} = 4/5$
   Pour plusieurs lancers consécutifs, on introduit la suite d'évènements R_i « on tire une face rouge au $i$ème lancer ».
   On cherche comme précédemment et par indépendance entre les lancers une fois le dé choisi :
   $\mathbf{P}_{\cap_{i=1}^n R_i}(R_{n+1}) = \dfrac{\mathbf{P}(\cap_{i=1}^n R_i \cap R_{n+1})}{\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(\cap_{i=1}^n R_i \cap R_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{A}) \times \mathbf{P}_{\overline{A}}(\mathbf{P}(\cap_{i=1}^n R_i \cap R_{n+1})} = \dfrac{(2/3)^{n+1} * 1/2}{(2/3)^{n+1} * 1/2 + (1/3)^{n+1} * 1/2}$
   La limite est 1, ce qui est conforme à l'intuition : répéter des fréquences élevées de faces rouge est plus probable sur le dé A que l'autre !

Exercice 8 *Variables aléatoires*

On va utiliser deux variables : t qui désigne l'instant où l'on est, et k qui désigne le spot allumé à l'instant courant. Une fonction possible est :

```
def simulspot() :
   t=0
   k=1
   while (k !=2) :
      t=t+1
      if (k==1) :
         k=random.randint(1,4)
      else :
         k=k-1
   return t
```

Si le spot reste constamment allumé jusqu'à l'instant n , c'est qu'il y a eu la succession d'événement Ak : "le spot S1 est éclairé à l'instant k".
Par la formule des probabilités composées, on trouve que :
$P(A1 \cap \cdots \cap An) = P(An|A1 \cap \cdots \cap An - 1) \ldots P(A2|A1)P(A1) = 1/4^n$.
$P(X = 1) = 1/4$
A l'aide d'une réunion disjointe $P(X = 2) = 5/16$.
Soit $n \geq 3$
. S2 s'allume pour la première fois à l'instant n si et seulement si :
Soit S1 reste allumé jusqu'à l'instant n-1, et S2 s'allume à l'instant n. Soit S1 reste allumé jusqu'à l'instant n-2, et S3 s'allume à l'instant n-1.

Soit S1 reste allumé jusqu'à l'instant n-3, et S4 s'allume à l'instant n-2.
Ces cas sont disjoints

on obtient : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = 1/4 + 5/8 + 21 \sum_{n=3}^{+\infty} n/4^n = 7/3.$

la fin du calcul utilisera les notions vues en spé !

Indications