II. Du 1 au 15 juillet : révisions d'algèbre

Exercice 1 *Matrice d'une application linéaire*

Soient $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de E figuré défini pour tout (x, y, z) par

$$f(x, y, z) = (2x - y, -2x + y - 2z, x + y + 3z)$$

On pose $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$.

1. On a $\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$.

   Rappelons que pour $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ *on a* $f(1, 0, 0) = (2, -2, 1)$ *qui correspond à la première colonne de* A, *etc...*

2. On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(E)$. Il suffit de montrer la liberté de $\mathcal{B}'$ pour conclure.
   • Variante 1 : on pose $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
   $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0(1)$
   En décomposant selon la base $\mathcal{B}$:
   $(1) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ a-b & = & 0 \\ -a-c & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & a \\ c & = & -a \end{array} \right.$
   Donc $a = b = c = 0$ et la famille est libre.
   • Variante 2 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{dev\%L_1}{=} (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ce qui prouve que $\mathcal{B}'$ est libre
   Conclusion : $\mathcal{B}'$ est libre et maximale dans E, donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } E.}$
   Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

3. On calcule
   $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $f(e'_1) = e'_1 = 1 \times e'_1 + 0 \times e'_2 + 0 \times e'_3$ ce qui donne la première colonne de D.
   $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $f(e'_2) = 2e'_2$
   $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(e'_3) = 3e'_3$
   On a finalement $\boxed{D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

4. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ contient en colonnes les décompositions des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ selon l'ancienne base $\mathcal{B}$.

Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3, L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Finalement $\underset{L_2 \leftarrow -L_2}{=}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On n'oublie pas de vérifier le calcul :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Conclusion $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

5. D'après la formule de passage :
   $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Pass}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$
   Ainsi $\boxed{D = P^{-1}AP}$ ou de manière équivalente $\boxed{A = PDP^{-1}}$

6. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{H}_n$: « $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ »

   • initialisation : Pour $n = 0$ $D^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1^0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix}$

   • hérédité : Supposons $\mathcal{H}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

   $D^{n+1} = D \times D^n \underset{\mathcal{H}_n}{=} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$, d'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

   Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$$

7. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ »
   • initialisation : Pour $n = 0$ $A^0 = I_3 = PP^{-1} = PI_3P^{-1} = PD^0P^{-1}$
   • hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   $A^{n+1} = A^n \times A \underset{\mathcal{P}_n}{=} PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} =$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.
   Conclusion :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$$
   Ainsi
   $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & -3^n \\ -1 & 0 & -3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $= \boxed{\begin{pmatrix} 1-2^n+3^n & 1-2^n & 1-2^{n+1}+3^n \\ 1-3^n & 1 & 1-3^n \\ -1-3^n & -1 & -1-3^n \end{pmatrix}}$

Exercice 2 *Polynômes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \dfrac{1}{\mathbf{i}}\left[(X+\mathbf{i})^n - (X-\mathbf{i})^n\right]$.

1. Par le binôme de Newton, $(X+\mathbf{i})^n-(X-\mathbf{i})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \left(\mathbf{i}^{n-k} - (-\mathbf{i})^{n-k}\right) X^k = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{k}{n} \left(\mathbf{i}^{n-k} - (-\mathbf{i})^{n-k}\right) X^k +$ $n \times 2\mathbf{i}X^{n-1} + 1 \times (1-1)X^n$
   On en déduit que le terme de plus haut degré de P est $2nX^{n-1}$ et le coefficient du terme de plus haut degré est $2n$.
2. On a en tête la relation $\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathbf{i}} = \mathrm{Im}(z)$
   Si $n-k$ est pair, $\dfrac{1}{\mathbf{i}}\left(\mathbf{i}^{n-k} - (-\mathbf{i})^{n-k}\right) = 0$
   Si $n-k = 2p+1$ est impair, $\dfrac{1}{\mathbf{i}}\left(\mathbf{i}^{n-k} - (-\mathbf{i})^{n-k}\right) = 2\mathbf{i}^{2p} = 2(-1)^p$
   Ainsi P est à coefficients réels.
3. On remarque que $P(\mathbf{i}) \neq 0$, donc $\mathbf{i}$ n'est pas racine de P.
   z racine de P équivaut donc à :
   $\left(\dfrac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right)^n = 1$
   En posant $Z = \dfrac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}$, on se ramène aux racines $n$ièmes de l'unité :
   Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}$
   Soit $z(1-\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}) = -\mathbf{i}(\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}+1)$
   Le cas particulier $k = 0$ donne une équation sans solution.
   Les racines de P sont alors les z_k donnés pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ par
   $z_k = \dfrac{-\mathbf{i}(\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}+1)}{(1-\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}})} = \dfrac{\cos(2k\pi/n)}{\sin(2k\pi/n)}$