II. Du 1 au 15 juillet : révisions d'algèbre

Exercice 1 *Matrice d'une application linéaire*

Soient $E=\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ et f l'endomorphisme de E figuré défini pour tout (x,y,z) par

$$f(x,y,z)=(2x-y,-2x+y-2z,x+y+3z)$$

On pose $e_1'=e_1+e_2-e_3$, $e_2'=e_1-e_3$ et $e_3'=e_1-e_2$.

1. On a $\boxed{A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-2&1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}}$.
   Rappelons que pour $(x,y,z)=(1,0,0)$ on a $f(1,0,0)=(2,-2,1)$ qui correspond à la première colonne de A, etc...
2. On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{B}')=3=\dim(E)$. Il suffit de montrer la liberté de $\mathcal{B}'$ pour conclure.
   • Variante 1 : on pose $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que
   $ae_1'+be_2'+ce_3'=0(1)$
   En décomposant selon la base $\mathcal{B}$:
   $(1)\iff\left\{\begin{array}{lcl}a+b+c&=&0\\a-b&=&0\\-a-c&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}a&=&0\\b&=&a\\c&=&-a\end{array}\right.$
   Donc $a=b=c=0$ et la famille est libre.
   • Variante 2 : $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-1&0&-1\end{vmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1+L_3}{=}\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\-1&0&-1\end{vmatrix}\underset{dev\%L_1}{=}(-1)^{1+2}\times1\times\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=1\neq0$ ce qui prouve que $\mathcal{B}'$ est libre
   Conclusion : $\mathcal{B}'$ est libre et maximale dans E, donc $\boxed{\mathcal{B}'\text{ est une base de }E.}$
   Vérifier que $\mathcal{B}'=(e_1',e_2',e_3')$ est une base de E.
3. On calcule
   $A\times\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-2&1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $f(e_1')=e_1'=1\times e_1'+0\times e_2'+0\times e_3'$ ce qui donne la première colonne de D.
   $A\times\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-2&1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $f(e_2')=2e_2'$
   $A\times\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-2&1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$ donc $f(e_3')=3e_3'$
   On a finalement $\boxed{D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}}$.
4. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ contient en colonnes les décompositions des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ selon l'ancienne base $\mathcal{B}$.

Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_3 + L_3}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -1/2 L_3}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow -L_1 - L_3 - L_2}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

On n'oublie pas de vérifier le calcul :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = I_3$$

Conclusion $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$

5. D'après la formule de passage :
   $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Pass}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$
   Ainsi $\boxed{D = P^{-1}AP}$ ou de manière équivalente $\boxed{A = PDP^{-1}}$

6. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{H}_n$: « $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ »

   • initialisation : Pour $n = 0$ $D^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1^0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix}$

   • hérédité : Supposons $\mathcal{H}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

   $D^{n+1} = D \times D^n \underset{\mathcal{H}_n}{=} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$, d'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

   Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$$

7. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ »
   • initialisation : Pour $n = 0$ $A^0 = I_3 = PP^{-1} = PI_3P^{-1} = PD^0P^{-1}$
   • hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   $A^{n+1} = A^n \times A \underset{\mathcal{P}_n}{=} PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} =$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.
   Conclusion :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$$
   Ainsi
   $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & -3^n \\ -1 & 0 & -3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$
   $= \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & (1-3^n)/2 & (-1+2^{n+1}+3^n)/2 \\ 0 & (1+3^n)/2 & (-1+3^n)/2 \\ 0 & (-1+3^n)/2 & (1+3^n)/2 \end{pmatrix}}$

Exercice 2 *Polynômes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \frac{1}{\mathbf{i}}\left[(X+\mathbf{i})^n - (X-\mathbf{i})^n\right]$.

1. Par le binôme de Newton, $(X+\mathbf{i})^n - (X-\mathbf{i})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \left(\mathbf{i}^{n-k} - (-\mathbf{i})^{n-k}\right) X^k = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{k}{n} \left(\mathbf{i}^{n-k} - (-\mathbf{i})^{n-k}\right) X^k +$ $n \times 2\mathbf{i}X^{n-1} + 1 \times (1-1)X^n$
   On en déduit que le terme de plus haut degré de P est $2nX^{n-1}$ et le coefficient du terme de plus haut degré est $2n$.
2. On a en tête la relation $\frac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}} = \mathrm{Im}(z)$
   Si $n-k$ est pair, $\frac{1}{\mathbf{i}}\left(\mathbf{i}^{n-k} - (-\mathbf{i})^{n-k}\right) = 0$
   Si $n-k = 2p+1$ est impair, $\frac{1}{\mathbf{i}}\left(\mathbf{i}^{n-k} - (-\mathbf{i})^{n-k}\right) = 2\mathbf{i}^{2p} = 2(-1)^p$
   Ainsi P est à coefficients réels.
3. On remarque que $P(\mathbf{i}) \neq 0$, donc $\mathbf{i}$ n'est pas racine de P.
   z racine de P équivaut donc à :
   $\left(\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right)^n = 1$
   En posant $Z = \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}$, on se ramène aux racines $n$ièmes de l'unité :
   Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}$
   Soit $z(1 - \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}) = -\mathbf{i}(\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}} + 1)$

Le cas particulier $k=0$ donne une équation sans solution.
Les racines de P sont alors les z_k donnés pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ par
$$z_k = \frac{-\mathbf{i}(\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}+1)}{(1-\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}})} = \frac{\cos(2k\pi/n)}{\sin(2k\pi/n)}$$