CCP PC 2016 - un corrigé

PROBLÈME

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\displaystyle\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$.

PARTIE 1. GEOMETRIE

On note A_0, A_1 et A_2 les trois éléments de $\mathbb{R}^2$ définis par $A_0 = (0,1)$, $A_1 = (1,1)$ et $A_2 = (1,0)$.
On note $\mathscr{T}$ l'ensemble défini par $\mathscr{T} = \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, x+y \geq 1\}$.
Pour tout $t \in [0,1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1-t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :
$A(t) = p_{0,1}(t)A_0 + p_{1,1}(t)A_1$, $B(t) = p_{0,1}(t)A_1 + p_{1,1}(t)A_2$ et $C(t) = p_{0,1}(t)A(t) + p_{1,1}(t)B(t)$.

1. Soit $t \in [0,1]$.

1.a) $\boxed{p_{0,2}(t) = \binom{2}{0} t^0(1-t)^2 = (1-t)^2}$. $\boxed{p_{1,2}(t) = \binom{2}{1} t^1(1-t)^1 = 2t(1-t)}$, et, $\boxed{p_{2,2}(t) = \binom{2}{2} t^2(1-t)^0 = t^2}$.

1.b) $\boxed{A(t) = (1-t)A_0 + tA_1 = (t,1)}$, $\boxed{B(t) = (1-t)A_1 + tA_2 = (1,1-t)}$ et,
$\boxed{C(t) = (1-t)A(t) + tB(t) = (2t-t^2, 1-t^2)}$.

1.c) On a alors, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} p_{k,2}(t)A_k = (1-t)^2A_0 + 2t(1-t)A_1 + t^2A_2 = (2t-t^2, 1-t^2) = C(t)$.

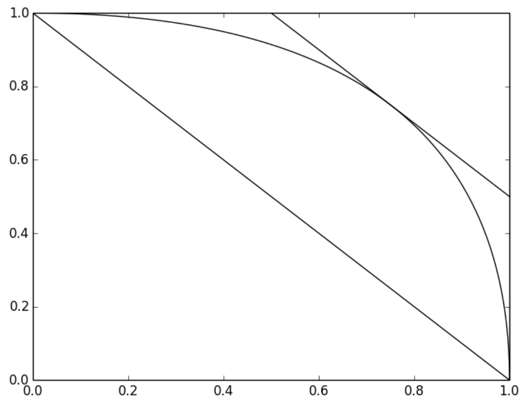
2.) Soit $(A,B) \in \mathscr{T}^2$, soit $\lambda \in [0,1]$, posons $C = \lambda A + (1-\lambda)B$, alors, $A = (x,y)$, $B = (x',y')$ avec $(x,y,x',y') \in [0,1]^4$ et $x+y \geq 1$, $x'+y' \geq 1$.
Ainsi, $C = (\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y')$ et $0 \leq \lambda x + (1-\lambda)x' \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$ car x et y sont entre 0 et 1, de même, $0 \leq \lambda y + (1-\lambda)y' \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$, de plus, $\lambda x + (1-\lambda)x' + \lambda y + (1-\lambda)y' = \lambda(x+y) + (1-\lambda)(x'+y') \geq \lambda + (1-\lambda) = 1$, $x+y \geq 1$ et $x'+y' \geq 1$.
En conclusion, $\boxed{\mathscr{T} \text{ est donc une partie convexe de } \mathbb{R}^2}$.

3.) Soit $\mathscr{C}$ l'arc paramétré à partir de la fonction $f : \begin{array}{ccc} t & \mapsto & C(t) \\ [0,1] & \to & \mathbb{R}^2. \end{array}$

3.a) Soit $t \in [0,1]$, $C(t) = (2t-t^2, 1-t^2) \in [0,1]^2$ car $t \in [0,1]$, donc, $t^2 \in [0,1] \Rightarrow 1-t^2 \in [0,1]$.
La fonction $f : t \mapsto 2t - t^2$, est dérivable sur $[0,1]$, et, $f'(t) = 2 - 2t = 2(1-t) \geq 0$ sur $[0,1]$, or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc, $\forall t \in [0,1]$, $f(t) \in [0,1]$.
De plus, $2t - t^2 + 1 - t^2 = 1 + 2t(1-t) \geq 1$, car $t(1-t) \geq 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{tous les points de } \mathscr{C} \text{ sont dans } \mathscr{T}}$.

3.b) Pour tout $t \in [0,1]$, $\boxed{\text{un vecteur directeur de la tangente } \mathscr{D}_t \text{ à } \mathscr{C} \text{ en } C(t) \text{ est } (2-2t, -2t)}$ car, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(t) = (2-2t, -2t) \neq (0,0)$.

3.c) Soit $t \in [0,1]$, une équation de la droite $\mathscr{D}_t$ est : $\begin{vmatrix} x-(2t-t^2) & 2-2t \\ y-(1-t^2) & -2t \end{vmatrix} = 0 \iff t(x-2t+t^2) + (1-t)(y-1+t^2) = 0$.
Et, $A(t) \in \mathscr{D}_t$, car, $t(t-2t+t^2) + (1-t)(1-1+t^2) = 0$, $B(t) \in \mathscr{D}_t$, car, $t(1-2t+t^2) + (1-t)(1-t-1+t^2) = 0$.
$A(t)$ et $B(t)$ sont sur la droite $\mathscr{D}_t$, donc, pour tout $t \in [0,1]$, $\boxed{\text{le segment } [A(t), B(t)] \text{ est inclus dans } \mathscr{D}_t}$



3.d)

PARTIE 2. ALGEBRE LINEAIRE ET PROBABILITÉS

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note $\mathscr{F}$ la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée des polynômes $(p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), ..., p_{n,n}(X))$.

4. 4.a) φ_n et B_n sont des applications linéaires, en effet,
soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(\lambda P + Q) = nX(\lambda P + Q)(X) + X(1-X)(\lambda P + Q)'(X) = \lambda[nXP(X) + X(1-X)P'(X)] + [nXQ(X) + X(1-X)Q'(X)] = \lambda\varphi_n(P) + \varphi_n(Q)$.

$$\begin{aligned} B_n(\lambda P + Q)(X) &= \sum_{k=0}^{n}(\lambda P + Q)\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) = \lambda\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) + \sum_{k=0}^{n}Q\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) \\ &= \lambda B_n(P) + B_n(Q) \end{aligned}.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, car, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, or, $\varphi_n(X^k) = nX^{k+1} + X(1-X)kX^{k-1} = (n-k)X^{k+1} + kX^k$ a un degré $k+1 \leq n$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$, et $\varphi_n(X^n) = nX^n$ a un degré n, donc, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi_n(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$, ainsi, $\varphi_n n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Et, $B_n(P) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, car $P\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_{kn} \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi_n \text{ et } B_n \text{ sont des endomorphismes de } \mathbb{R}_n[X]}$.

4.b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned} \boxed{\varphi_n(p_{k,n})(X)} &= nXp_{k,n}(X) + X(1-X)p'_{k,n}(X) \\ &= nX\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} + X(1-X)\left[\tbinom{n}{k}kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - \tbinom{n}{k}X^k(n-k)(1-X)^{n-k-1}\right] \\ &= n\tbinom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k} + k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k+1} - (n-k)\tbinom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k} \\ &= k\tbinom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k} + k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k+1} \\ &= k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}[X + 1 - X] = k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\boxed{= kp_{k,n}(X)} \end{aligned}$$

4.c) D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_{k,n}$ est un vecteur propre de B_n associé à la valeur propre k (car $p_{k,n} \neq 0$ et $\varphi_n(p_{k,n}) = kp_{k,n}$).
La famille $\mathscr{F}$ est donc une famille libre, puisque ce sont $n+1$ vecteurs propres de φ_n associés $n+1$ valeurs propres distinctes.
Or, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{F} \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \varphi_n \text{ est diagonalisable}}$.

4.d) $\boxed{\varphi_n \text{ n'est pas bijectif}}$, car φ_n possède la valeur propre 0, donc, φ_n 'est pas injectif.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $B_n(P) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) = 0 \iff \forall k \in [\![0,n]\!]$, $P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ car $\{p_{kn} \,/\, k \in [\![0,n]\!]\}$ est une famille libre.
P possède donc $n+1$ racines distinctes, comme $d^\circ(P) \leq n$, P est le polynôme nul. Ainsi, $\mathrm{Ker}(B_n) = \{0\}$ $\iff$ B_n est injectif, comme c'est un endomorphisme en dimension finie, $\boxed{B_n \text{ est bijectif}}$.

5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$. T_r suit la loi binomiale $\mathscr{B}(r,t)$. On note $\overline{T_r} = T_r/r$.

5.a) La variable aléatoire qui compte le nombre de succès d'un événement de probabilité t au cours de r expériences identiques et indépendants suit la loi binomiale $\mathscr{B}(r,t)$.

5.b) Nous avons $\boxed{T_r(\Omega) = [\![0,r]\!]}$ et, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,r]\!], \text{ on a } P(T_r = k) = \tbinom{r}{k}t^k(1-t)^{r-k} = p_{k,r}(t)}$ en effet, on doit avoir k succès et $r-k$ échecs au cours de nos r expériences et il faut choisir les rangs des k succès parmi les r expériences.

5.c) $\boxed{E(T_r) = rt}$, $\boxed{E(\overline{T_r}) = \frac{1}{r}E(T_r) = t}$ par linéarité de l'espérance.

$\boxed{V(T_r) = rt(1-t)}$, $\boxed{V(\overline{T_r}) = \frac{1}{r^2}V(T_r) = \frac{t(1-t)}{r}}$, $E\boxed{(T_r^2) = V(T_r) + (E(T_r))^2 = rt(1-t) + r^2t^2}$ d'après la formule de Huyghens, et, $\boxed{E((\overline{T_r})^2) = \frac{1}{r^2}E(T_r^2) = \frac{t(1-t)}{r} + t^2 = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1)}$.

5.d) Pour tout $t \in [0,1]$: $\boxed{\sum_{k=0}^{r} p_{k,r}(t) = 1}$ car, T_r est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,r]\!]$.

$\boxed{\sum_{k=0}^{r}\frac{k}{r}p_{k,r}(t) = \sum_{k=0}^{r}\frac{k}{r}P(T_r = k) = \sum_{k=0}^{r}\frac{k}{r}P\left(\overline{T_r} = \frac{k}{r}\right) = E(\overline{T_r}) = t}$ d'après la formule de transfert.

Et, $\boxed{\sum_{k=0}^{r}\left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t)} = \sum_{k=0}^{r}\left(\frac{k}{r}\right)^2 P(T_r=k) = \sum_{k=0}^{r}\left(\frac{k}{r}\right)^2 P\left(\overline{T_r}\frac{k}{r}\right)$.

$$= E((\overline{T_r})^2) = \boxed{\left(1-\frac{1}{r}\right)t^2+\frac{1}{r}t}$$

5.e) Les trois relations obtenues à la question précédente sont des expressions polynomiales en t qui sont identiques sur tout l'intervalle $[0,1]$, elles coïncident donc en une infinité de valeurs, elles sont donc égales. Ainsi, les trois égalités précédentes sont encore valables pour tout $t\in\mathbb{R}$.

6. $\boxed{\mathbb{R}_2[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X]}$, en effet, $\mathbb{R}_2[X]$ est inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$, $0\in\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par combinaison linéaire.

De plus, nous avons, d'après la question précédente, si on pose $P_k(X)=X^k$ pour $k\in\{0,1,2\}$, $B_n(P_0)(X) = \sum_{k=0}^{n} P_0\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) = 1 \in \mathbb{R}_2[X]$, $B_n(P_1)(X) = \sum_{k=0}^{n} P_1\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}p_{k,n}(X) = X\in\mathbb{R}_2[X]$ et, $B_n(P_2)(X) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{k,n}(X) = \left(1-\frac{1}{n}\right)X^2+\frac{1}{n}X\in\mathbb{R}_2[X]$.

L'image par B_n d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$ est dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc $\boxed{\mathbb{R}_2[X] \text{ est stable par } B_n}$.

On note $\widetilde{B_n}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par B_n ; on rappelle que dans ce cas, pour tout $P\in\mathbb{R}_2[X]$, $\widetilde{B_n}(P)=B_n(P)$. On note A_n la matrice de $\widetilde{B_n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

7. $\boxed{A_n=}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{n}\\0&0&1-\frac{1}{n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\frac{1}{n}&0&0\\0&1-\frac{1}{n}&0\\0&0&1-\frac{1}{n}\end{pmatrix}+\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)I_3+\frac{1}{n}H}$.

8. 8.a) $H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, son polynôme caractéristique est donc $X(X-1)^2$, 0 est une valeur propre simple, son espace propre est donc de dimension 1, et 1 est une valeur propre double, et le rang de $H-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ est 1, donc, par théorème du rang la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $3-\text{rg}(H-I)=2$, $\boxed{\text{la matrice } H \text{ est donc diagonalisable}}$.

8.b) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix} = \boxed{Q \text{ est inversible}}$, car c'est une matrice triangulaire qui n'a aucun 0 sur sa diagonale.

8.c) On sait que, si on note $E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $E_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $HE_1=E_1$ et $HE_2=E_2$, or, pour diagonaliser H, on prend une base de vecteurs propres pour $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et Q la matrice de passage de la base $\{E_1,E_2,E_3\}$ à la base de vecteurs propres.

Il reste donc à trouver un troisième vecteur $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $HX=0 \iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\iff \left\{\begin{array}{l}a=0\\b+c=0\end{array}\right.$ avec $c=1$ (d'après ce qui est demandé), on trouve que $X=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ est l'unique solution. On prend donc $E_3=X$.

Ainsi, si on pose $Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, alors, Q est inversible et $Q^{-1}HQ=D \iff \boxed{H=QDQ^{-1}}$.

9. 9.a) $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n)=I_3}$, en effet, pour tout $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$, $\lim_{n\to+\infty}(A_n)_{i,j} = \left\{\begin{array}{lll}1&\text{si}&i=j\\0&\text{si}&i\neq j\end{array}\right.$.

9.b) ψ est linéaire, en effet,
Soit $(M,M')\in(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$, soit $\lambda\in\mathbb{R}$,
$\psi(\lambda M+M')=Q(\lambda M+M')Q^{-1}=\lambda QMQ^{-1}+QM'Q^{-1}=\lambda\psi(M)+\psi(M')$.

9.c) ψ est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et ces deux espaces vectoriels sont de dimension finie, donc, ψ est continue.

Ainsi, si $\lim\limits_{\ell\to+\infty}(M_\ell) = M$, alors, $\boxed{\lim\limits_{\ell\to+\infty}(QM_\ell Q^{-1}) = \lim\limits_{\ell\to+\infty}\psi(M_\ell) = \psi(M) = QMQ^{-1}}$.

9.d) Nous avons $Q^{-1}A_nQ = Q^{-1}\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)I_3 + \dfrac{1}{n}H\right]Q = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)Q^{-1}I_3Q^{-1} + \dfrac{1}{n}QHQ^{-1}$.

Ainsi, $\boxed{Q^{-1}A_nQ = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)I_3 + \dfrac{1}{n}D = A_n}$.

9.e) Pour $n \geq 2$, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $A_n^\ell = QD_n^\ell Q^{-1}$.

Or, $\lim\limits_{\ell\to+\infty}(D_n^\ell) = D$, car, $0 < 1 - \dfrac{1}{n} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{\ell\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^\ell = 1$, donc, $\lim\limits_{\ell\to+\infty}(D_n^\ell)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$ pour $n \geq 2$.

Ainsi, pour $n \geq 2$, $\boxed{\lim\limits_{\ell\to+\infty}(A_n^\ell) = QDQ^{-1} = H}$ d'après la question précédente.

9.f) Pour $n \geq 2$, $A_n^n = QD_n^nQ^{-1}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(D_n^n)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j\neq 3 \\ e^{-1} & \text{si} \quad i=j=3 \\ 0 & \text{si} \quad i\neq j \end{cases}$ pour $n \geq 2$, car $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-1}$.

En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n^n) = Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}Q^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ d'après la question **9.c)**.

D'où, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n^n) =} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-e^{-1}\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1-e^{-1}\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}}$.

PARTIE 3. ANALYSE ET PROBABILITES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(x).$$

On reprend les notations de la question 5 avec $r = n$. On remarque que dans ce cas, pour tout $t \in [0,1]$, o a :

$$f(t) - B_n(f)(t) = E(f(t) - f(\overline{T_n})) = \sum_{k=0}^{n}(f(t) - f(k/n))p_{k,n}(t).$$

1010.a) Soi Y une variable aléatoire discrète Y admettant une variance, d'après la formule de Huyghens, $V(Y) = E((Y-(E(Y))^2) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \geq 0$, donc, $E(Y^2) \geq (E(Y))^2 \iff \boxed{E(Y) \leq |E(Y)| \leq \sqrt{E(Y^2)}}$.

10.b) Pour tout $t \in [0,1]$, $E\left(|t - \overline{T_n}|\right) \leq \sqrt{E\left(\left(t-\overline{T_n}\right)^2\right)}$.

Or, $E\left(\left(t-\overline{T_n}\right)^2\right) = E(t^2 - 2t\overline{T_n} + \overline{T_n}^2) = t^2 - 2tE(\overline{T_n}) + E(\overline{T_n}^2) =$ par linéarité de l'espérance, ainsi, $E\left(\left(t-\overline{T_n}\right)^2\right) = t^2 - 2t.t + \left(1-\dfrac{1}{n}\right)t^2 + \dfrac{1}{n}t = \dfrac{t-t^2}{n} = \dfrac{t(1-t)}{n}$ d'après la question **5.c)**.

D'où, $\boxed{\text{pour tout } t \in [0,1],\ E\left(|t-\overline{T_n}|\right) \leq \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}}.}$

11 On suppose dans toute cette question que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

11.a) f' est continue sur le segment $[0,1]$, ainsi, f' est bornée sur $[0,1]$, et $\boxed{\text{il existe donc un réel } M_f \text{ tel que}}$: $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq M$,

D'après l'inégalité des accroissements finis, $\boxed{\text{pour tout } (a,b) \in [0,1]^2,\ |f(a) - f(b)| \leq M_f|a-b|}$.

Dans toute la suite de cette question, on suppose que M_f est un réel choisi de telle sorte que :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2, \quad |f(a) - f(b)| \leq M_f|a-b|;$$

11.b) Pour tout $t \in [0,1]$, comme, $\overline{T_n}(\Omega) \subset [0,1]$ (car $T_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$), on peut donc appliquer l'inégalité obtenue à la question précédente.
Ainsi, $E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leq E(M_f|t - \overline{T_n}|) = M_f E(|t - \overline{T_n}|)$ par croissance puis, linéarité de l'espérance.
Ainsi, d'après la question **10.b)**, $\boxed{E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leq M_f \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}}}$.

11.c) Pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| = \left|E(f(t) - f(\overline{T_n}))\right| \leq E\left(|f(t) - f(\overline{T_n}|\right)$, en effet, pour tout variable discrète Y admettant une espérance, $|E(Y)| \leq E(|Y|)$, car si $Y(\Omega) = \{y_i \,/\, i \in I\}$, $|E(Y)| = \left|\sum_{i \in I} y_i P(Y = y_i)\right| \leq \sum_{i \in I} |y_i| P(Y = y_i) = E(|Y|)$ puisque $\sum y_i P(Y = y_i)$ est une série absolument convergente.
D'où, $E\left(|f(t) - f(\overline{T_n}|\right) \leq M_f \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}}$.
De plus, $h : t \mapsto t(1-t) = t - t^2 \geq 0$ est dérivable sur $[0,1]$, et $h'(t) = 1 - 2t = 0 \iff t = 1/2$, h est croissante sur $[0, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, 1]$, donc, $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq h(t) \leq h(1/2) = 1/4$.
En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } t \in [0,1],\ |f(t) - B_n(f)(t)| \leq \dfrac{M_f}{2\sqrt{n}}}$.

11.d) On a pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \dfrac{M_f}{2\sqrt{n}} = a_n$ avec a_n indépendant de t et $a_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, donc, $\boxed{(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,1]}$.

PARTIE 4. INTEGRALES

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

12. $x \mapsto B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) p_{k,n}(x)$ est continue sur $[0,1]$ comme composée et somme de fonctions continues, et, $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
Donc, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$.

13. On note $S_n(f) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

13.a) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$, on pose $u(x) = x^a$, $v(x) = (1-x)^b$, $u'(x) = a x^{a-1}$, et, $v(x) = -\dfrac{1}{b+1}(1-x)^{b+1}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$,
d'où, $\boxed{\int_0^1 x^a (1-x)^b\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)] + \dfrac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1}\,\mathrm{d}x}$.

13.b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}_k$ la propriété : $\displaystyle\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$.
* $\mathcal{P}_0$ est vraie, car $\displaystyle\int_0^1 p_{0,n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$.
* Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie, et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie avec $0 \leq k+1 \leq n$.
$\displaystyle\int_0^1 \binom{n}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{k+1}{n-k} \int_0^1 \binom{n}{k+1} x^k (1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$.
Or, $\dfrac{k+1}{n-k}\binom{n}{k+1} = \dfrac{(k+1)n!}{(n-k)(k+1)!(n-k-1)!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \binom{n}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$ d'après $\mathcal{P}_k$.
* En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ tout } k \in [\![0,n]\!]}$, $\mathcal{P}_k$ est vraie,
c'est à dire que $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x \text{ est indépendant de } k \text{ et vaut } \tfrac{1}{n+1}}$.

13.c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$,

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(f) =} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\int_0^1 p_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x\right) =$ $\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$ d'après les questions **12.** et **13.b)**.

14. Si f est continue sur $[0,1]$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$ car $S_n(f)$ est une somme de Riemann attachée à f fonction continue sur $[0,1]$.

15. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{N}^3$ tels que $a+b\le c-2$.

15.a) Soit $x\in[0,1]$, la fonction $g: u\mapsto \dfrac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
De plus,
* si $x\neq 0$, $g(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{u^a(xu)^b}{u^c} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^b}{u^{c-a-b}}$ avec $c-a-b\ge 2>1$, donc $u\mapsto \dfrac{x^b}{u^{c-a-b}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
* si $x=0$, $g(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{u^a}{u^c} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{c-a}}$ et $c-a\ge b+2>1$, donc, $u\mapsto g(u)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty}\frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u \text{ est convergente}}$.

15.b) Pour $b\ge 1$, $\boxed{\text{la fonction } F: x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1]}$ d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, en effet,

* Pour tout $u\in\mathbb{R}_+$, $x\mapsto h(x,u)=\dfrac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

* Pour tout $x\in[0,1]$, $u\mapsto h(x,u)=\dfrac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $a+b\le c-2$.

* Pour tout $x\in[0,1]$, $u\mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,u)=\dfrac{u^a bu(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}=\dfrac{u^a bu(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}$ est continue par morceaux.

* **Domination :**
Pour tout $x\in[0,1]$ et pour tout $u\in\mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,u)\right| = \left|b.\dfrac{u^{a+1}(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}\right| \le b.\dfrac{u^{a+1}(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c} = \varphi(u)$.
Et, φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, d'après la question **15.a)**, car $a+1\in\mathbb{N}$, $b-1\in\mathbb{N}$, $c\in\mathbb{N}$ et $a+1+b-1=a+b\le c-2$.

15.c) $\boxed{\text{La fonction } h: \begin{array}{ccc} t & \mapsto & \dfrac{t}{1-t} \\ {[0,1[} & \to & [0,+\infty[\end{array} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[}$, et $h'(t)=\dfrac{1-t+t}{(1-t)^2}=\dfrac{1}{(1-t)^2}>0$ pour $t\in[0,1[$.
h est donc continue et strictement croissante sur $[0,1[$, $\boxed{\text{elle est donc bijective de } [0,1[\text{ sur } [0,+\infty[}$.

15.d) On fait le changement de variable $u=\dfrac{t}{1-t}$ dans l'intégrale $F(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^a}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}x$, ceci est possible d'après la question précédente. Et, on a $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2}$. $F(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^a}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}x$ converge.

On obtient, $F(0)=\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\frac{t}{1-t}\right)^a}{\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^c}\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2} = \int_0^1 \frac{t^a}{(1-t)^{a+2-c}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^a(1-t)^{c-2-a}\,\mathrm{d}t$.

Nous avons $a\in\mathbb{N}$, et $c-2-a\in[\![0,c-2]\!]$, car $c-2-a\ge b\ge 0$, donc,

$\boxed{F(0)=\int_0^1 \frac{1}{\binom{c-2}{a}}p_{a,c-2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\binom{c-2}{a}}.\frac{1}{c-1} = \frac{a!(c-a-2)!}{(c-1)!}}$ d'après la question **13.b)**.

On a alors $F(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^a}{(1+u)^{c-b}}\,\mathrm{d}x$, avec le même calcul que précédemment en remplaçant c par $c-b\ge$

$a+2>2$ et avec $c-b-a-2\geq 0$, on obtient $\boxed{F(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\binom{c-b-2}{a}}p_{a,c-b-2}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a!(c-b-a-2)!}{(c-b-1)!}}$.

PARTIE 5. SERIES DE FONCTIONS

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}$, et $t\in[0,1]$, on note :

$$f_n(t)=\begin{cases} p_{k,n}(t) & \text{si} \quad n\geq k\\ 0 & \text{si} \quad n<k,\end{cases} \quad \text{si bien que } f_n(t)=\begin{cases} \binom{n}{k}t^k(1-t)^k & \text{si} \quad n\geq k\\ 0 & \text{si} \quad n<k.\end{cases}$$

16. Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n^k}{k!}}$, car pour i fixé entre 0 et $k-1$, $n-i\underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Pour tout $t\in]0,1[$, on fait tendre n vers $+\infty$, donc, pour n assez grand, $n\geq k$, ainsi,

$f_n(t)=p_{k,n}(t)=\binom{n}{k!}t^k(1-t)^{n-k}\underset{n\to+\infty}{\sim} n^k(1-t)^n\dfrac{t^k}{k!(1-t)^k}$.

17. Pour t_0 fixé dans $]0,1[$, $n^2 f_n(t_0)\underset{n\to+\infty}{\to}0$, car $\frac{t_0^k}{k!(1-t_0)^k}$ est fixé et $n^{k+2}(1-t)^n\underset{n\to+\infty}{\to}0$ (par croissance comparée de $\dfrac{1}{n^{k+2}}$ et $(1-t_0)^n$).

Ainsi, $f_n(t_0)=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, or, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc, $\sum f_n(t_0)$ converge pour tout $t_0\in[0,1]$.

$f_n(0)=f_n(1)=0$, donc, $\sum f_n(t_0)$ converge pour $t_0\in\{0;1\}$.

En conclusion, $\boxed{\sum f_n \text{ converge simplement sur } [0,1]}$.

Pour $t\in[0,1]$, on note $S(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)$.

18. $\boxed{S(0)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(0)=0}$ car, si $n<k$, $f_n(0)=0$, si $n\geq k\geq 1$, $f_n(0)=\binom{n}{k}0^k=0$.

$\boxed{S(1)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(1)=1}$, en effet k étant fixé dans $\mathbb{N}^*$, si $n<k$, $f_n(1)=0$ et si $n\geq k$, $f_n(1)=\binom{n}{k}0^{n-k}=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad n=k\\ 1 & \text{si} \quad n\neq k\end{cases}$.

1919.a) $u\mapsto\dfrac{1}{1-u}$ est développable en série entière et $\boxed{\dfrac{1}{1-u}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u^n \text{ sur }]-1,1[}$.

19.b) $u\mapsto\dfrac{1}{1-u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence à savoir sur $]-1,1[$, et,

$$\boxed{\text{pour tout } u\in[0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}[u^n]^{(k)}=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)...(n-k+1)u^{n-k}=\left[\frac{1}{1-u}\right]^{(k)}=\frac{k!}{(1-u)^{k+1}}}.$$

car $[u^n]^{(k)}=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad k>n\\ n(n-1)...(n-k+1)u^{n-k} & \text{si} \quad k\in[\![0,n]\!]\end{cases}$.

19.c) D'après la définition de f_n ($f_n(t)=0$ si $n<k$) et la question précédente, pour tout $t\in[0,1[$,

$$\boxed{S(t)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}.n(n-1)...(n-k+1)(1-t)^{n-k}=\frac{t^k}{k!}.\frac{k!}{(1-(1-t))^{k+1}}=\frac{1}{t}}.$$

19.d) Si la série $\sum f_n$ convergeait normalement sur $[0,1]$, elle convergerait uniformément sur $[0,1]$.

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1[$ car $k\geq 1$ (en effet, f_n est continue sur $]0,1[$ et f_n est continue en 0 car $k\geq 1$), S serait donc continue sur $[0,1[$, or, $S(0)=0$ et $\displaystyle\lim_{t\to0^+}S(t)=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}=+\infty$;

donc, $\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } [0,1]}$.