

Partie I - Quelques résultats généraux

1. $U_0 = 1$ et $L_0 = \frac{1}{2^{00}!} U_0^{(0)} = 1$.

$U_1 = (X^2 - 1)$ et $L_1 = \frac{1}{2^{11}!} U_1^{(1)} = \frac{1}{2}(2X) = X$.

$U_2 = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = \frac{1}{2^{22}!} U_2^{(2)} = \frac{1}{8}(4X^3 - 4X)' = \frac{1}{8}(12X^2 - 4) = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

2. • Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(U_n^{(k)}) = 2n - k$ et $\text{cd}(U_n^{(k)}) = \prod_{i=0}^{k-1} (2n - i)$ (HR_k).

Initialisation : $U_n^{(0)} = U_n = (X^2 - 1)^n = X^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X^2)^k$ est bien un polynôme de degré $2n - 0$ ayant pour coefficient dominant 1.

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ et supposons HR_k vérifiée.

Alors $U_n^{(k)}$ est de degré $2n - k$ et a pour coefficient dominant $\prod_{i=0}^{k-1} (2n - i)$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}_{2n-k-1}[X]$ tel que

$$U_n^{(k)} = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (2n - i) \right) X^{2n-k} + Q,$$

donc

$$\begin{aligned} U_n^{(k+1)} &= \left(\prod_{i=0}^{k-1} (2n - i) \right) (2n - k) X^{2n-k-1} + Q' \\ &= \left(\prod_{i=0}^k (2n - i) \right) X^{2n-k-1} + \underbrace{Q'}_{\in \mathbb{R}_{2n-k-2}[X]} \end{aligned}$$

donc $U_n^{(k+1)}$ est bien un polynôme de degré $2n - (k + 1)$ et de coefficient dominant $\left(\prod_{i=0}^{k+1-1} (2n - i) \right) X^{2n-k} + Q$. On a bien HR_{k+1} .

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $U_n^{(k)}$ est de degré $2n - k$ et a pour coefficient dominant $\prod_{i=0}^{k-1} (2n - i)$.

• Par suite, $L_n = \frac{1}{2^{nn}!} U_n^{(n)}$ est de degré $2n - n = n$ et a pour coefficient dominant :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{nn}!} \prod_{i=0}^{n-1} (2n - i) = \frac{1}{2^{nn}!} \prod_{i=n+1}^{2n} i \\ &= \frac{1}{2^{nn}!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

3. La famille (L_0, \dots, L_n) est libre (degrés échelonnés) et elle est composée de $n + 1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n + 1$, donc (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (X^2 - 1)^n = (X - 1)^n (X + 1)^n$, donc U_n a deux racines, -1 et 1, de multiplicité n .
• Comme $U_n = (X^2 - 1)^n$, $U_n' = n(2X)(X^2 - 1)^{n-1} = 2n(X - 1)^{n-1} (X + 1)^{n-1} (X - 0)$, donc, en prenant $\lambda = 2n$ et $\alpha = 0 \in] - 1, 1[$, on a bien

$$U_n' = \lambda(X - 1)^{n-1} (X + 1)^{n-1} (X - \alpha).$$

Remarque. Promis, je n'ai pas fait exprès de les déterminer, ils sont apparus tous seuls, comme des grands... L'énoncé attendait certainement une autre méthode, que je vais mettre en oeuvre ci-dessous

• Comme -1 et 1 sont racines de multiplicité n de U_n , elles sont racines de multiplicité $n - 1$ de U_n' , donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$U_n' = (X - 1)^{n-1} (X + 1)^{n-1} Q.$$

Comme $\deg(U'_n) = \deg(U_n) - 1 = 2n - 1$ et $\deg((X - 1)^{n-1}(X + 1)^{n-1}) = 2n - 2$, on a $\deg(Q) = 1$.

On a $U_n(1) = U_n(-1)$ où U_n est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] - 1, 1[$ (c'est un polynôme!), donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in] - 1, 1[$ tel que $U'_n(\alpha) = 0$. Or, $U'_n(\alpha) = \underbrace{(\alpha - 1)^{n-1}(\alpha + 1)^{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } \alpha \neq \pm 1} Q(\alpha)$, donc on a

$$Q(\alpha) = 0.$$

Comme on a aussi $\deg(Q) = 1$ et $Q(\alpha) = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda(X - \alpha)$ et on a donc

$$U'_n = \lambda(X - 1)^{n-1}(X + 1)^{n-1}(X - \alpha).$$

5. Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $] - 1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X - 1)^{n-k}(X + 1)^{n-k}(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k).$$

On supposera de plus, quitte à renuméroter, que $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$.

• Alors, comme -1 et 1 sont racines de multiplicité $n - k \geq 1$ de $U_n^{(k)}$, -1 et 1 sont racines de multiplicité $n - k - 1$ de $(U_n^{(k)})' = U_n^{(k+1)}$, donc il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U_n^{(k+1)} = (X - 1)^{n-k-1}(X + 1)^{n-k-1}Q$.

• Comme $\deg(U_n^{(k+1)}) = 2n - k - 1$ et $\deg((X - 1)^{n-k-1}(X + 1)^{n-k-1}) = 2n - 2k - 2$, on a $\deg(Q) = k + 1$.

• Posons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$. Alors on a $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < \alpha_{k+1}$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, $U_n^{(k)}$ est continu sur $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, dérivable sur $] \alpha_{k-1}, \alpha_k[$ (polynôme) et $U_n^{(k)}(\alpha_{k-1}) = U_n^{(k)}(\alpha_k) (= 0)$.

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in] \alpha_{k-1}, \alpha_k[$ tel que $(U_n^{(k)})'(\beta_k) = 0 \Leftrightarrow U_n^{(k+1)}(\beta_k) = 0$.

On a de plus, par construction,

$$-1 = \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \dots < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1,$$

donc les réels $(\beta_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ sont deux à deux distincts.

• Pour tout $i \in \llbracket 1, k + 1 \rrbracket$, $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = \underbrace{(\beta_i - 1)^{n-1}(\beta_i + 1)^{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } \beta_i \neq \pm 1} Q(\beta_i)$, donc, comme $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$, on a $Q(\beta_i) = 0$,

et donc β_i est une racine de Q .

• Q est un polynôme de degré $k + 1$ qui admet pour racines (distinctes!) $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$, donc il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \nu(X - \beta_1) \cdots (X - \beta_{k+1})$, et donc

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X - 1)^{n-k-1}(X + 1)^{n-k-1}(X - \beta_1) \cdots (X - \beta_{k+1}).$$

6. • Les questions 4 (initialisation pour $k = 1$) et 5 (hérédité pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$) permettent de démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $] - 1, 1[$ et un réel μ_k tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu_k(X - 1)^{n-k}(X + 1)^{n-k}(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k).$$

• En particulier, pour $k = n$, il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux à deux distincts dans $] - 1, 1[$ et un réel μ_n tels que :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} \mu_n (X - 1)^{n-n} (X + 1)^{n-n} (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \mu_n (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n), \end{aligned}$$

donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont n racines distinctes de L_n , et toutes ces racines sont dans $] - 1, 1[$.

En les ordonnant, on a bien l'existence des réels $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$ tels que

$$L_n = a_n \prod_{i=1}^n (X - x_i)$$

car L_n est de degré n et de coefficient dominant a_n .

Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

7. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda P + Q) &= (X^2 - 1)(\lambda P + Q)'' + 2X(\lambda P + Q)' \\ &= (X^2 - 1)(\lambda P'' + Q'') + 2X(\lambda P' + Q') \quad (\text{linéarité de la dérivation}) \\ &= \lambda((X^2 - 1)P'' + 2XP') + ((X^2 - 1)Q'' + 2XQ') \\ &= \lambda\phi(P) + \phi(Q), \end{aligned}$$

donc ϕ est une application linéaire.

De plus, elle va de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ (énoncé), donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

8. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\begin{aligned} \deg(\phi(P)) &= \deg((X^2 - 1)P'' + 2XP') \leq \max((X^2 - 1)P'', 2XP') = \max(2 + \deg(P''), 1 + \deg(P')) \\ &\leq \max(2 + \deg(P) - 2, 1 + \deg(P) - 1) = \max(\deg(P), \deg(P)) = \deg(P), \end{aligned}$$

donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\mathbb{R}_n[X]$ est donc bien stable par ϕ .

Remarque. Pour rappel, $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si $\deg(P) = \deg(Q)$,
et $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$, avec égalité si $\deg(P) \geq 1$.

9. Soit $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\phi(X^j) = \sum_{i=0}^n m_{i,j} X^i$.

Or,

$$\begin{aligned} \phi(X^0) &= \phi(1) = 0 \\ \phi(X^1) &= 2X \\ \text{et, pour tout } j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \phi(X^j) &= (X^2 - 1)j(j-1)X^{j-2} + 2jX^{j-1} \\ &= j(j-1)X^j - j(j-1)X^{j-2} + 2jX^j = j(j+1)X^j - j(j-1)X^{j-2}. \end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\begin{aligned} m_{0,0} &= 0 = 0(0+1) \quad \text{et} \quad \forall i \geq 1, m_{i,0} = 0 \\ m_{1,1} &= 2 = 1 \times 2 \quad \text{et} \quad \forall i \geq 2, m_{i,1} = 0 \\ \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, m_{j,j} &= j(j+1) \quad \text{et} \quad \forall i \geq j+1, m_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

donc M est bien triangulaire supérieure et, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

Remarque. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = \begin{cases} j(j+1) & \text{si } i = j \\ -j(j-1) & \text{si } i = j-2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

10. Comme M est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale.

On a donc $\text{Sp}(M) = \{k(k+1), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)(k+2) - k(k+1) = 2(k+1) > 0$, donc la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Les réels $(k(k+1))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont donc deux à deux distincts, donc M admet $n+1$ valeurs propres distinctes, et $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, donc M est diagonalisable, donc ϕ_n est diagonalisable.

11. • Pour $k=0$, $U'_k = 0$ et $2kXU_k = 0$, donc $(X^2 - 1)U'_k - 2kXU_k = 0$.
• Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U'_k = 2kX(X^2 - 1)^{k-1}$, donc $(X^2 - 1)U'_k - 2kXU_k = 2kXU_k - 2kXU_k = 0$.
• Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a bien $(X^2 - 1)U'_k - 2kXU_k = 0$.

12. D'après la formule de Leibniz pour les polynômes, en prenant la convention (habituelle) $\binom{n}{k} = 0$ si $k \notin \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} ((X^2 - 1)U'_k)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (X^2 - 1)^{(i)} (U'_k)^{(k+1-i)} \\ &= \binom{k+1}{0} (X^2 - 1)(U'_k)^{(k+1)} + \binom{k+1}{1} (X^2 - 1)'(U'_k)^{(k)} + \binom{k+1}{2} (X^2 - 1)''(U'_k)^{(k-1)} \\ &\quad + \sum_{k=3}^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \underbrace{(X^2 - 1)^{(i)}(U'_k)^{(k+1-i)}}_{=0 \text{ car } i \geq 3} \\ &= (X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + 2\frac{k(k+1)}{2}U_k^{(k)} \\ \text{et } (2kXU_k)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (2kX)^{(i)} (U_k)^{(k+1-i)} \\ &= \binom{k+1}{0} (2kX)(U_k)^{(k+1)} + \binom{k+1}{1} (2kX)'(U_k)^{(k)} + \sum_{i=2}^{k+1} \binom{k+1}{i} \underbrace{(2kX)^{(i)}(U_k)^{(k+1-i)}}_{=0 \text{ car } i \geq 2} \\ &= 2kXU_k^{(k+1)} + (k+1)2kU_k^{(k)}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} ((X^2 - 1)U'_k - 2kXU_k)^{(k+1)} &= (X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + k(k+1)U_k^{(k)} - 2kXU_k^{(k+1)} - (k+1)2kU_k^{(k)} \\ &= (X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)}. \end{aligned}$$

Par suite, d'après la question 11,

$$(X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = ((X^2 - 1)U'_k - 2kXU_k)^{(k+1)} = (0)^{(k+1)} = 0.$$

13. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ (car $\deg(L_k) = k \leq n$), $L_k \neq 0$ (car $a_k \neq 0$) et :

$$\phi_n(L_k) = \phi(U_k^{(k)}) = (X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} \stackrel{\text{cf Q12}}{=} k(k+1)U_k^{(k)} = k(k+1)L_k,$$

donc L_k est un vecteur propre de ϕ_n associé à la valeur propre $k(k+1)$.

14. • ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension $n+1$) qui admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc tous les espaces propres de ϕ_n sont de dimension 1.

De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_k \in E_{k(k+1)}(\phi_n)$, donc $\text{Vect}(L_k) \subset E_{k(k+1)}(\phi_n)$ et, par égalité des dimensions, $E_{k(k+1)}(\phi_n) = \text{Vect}(L_k)$.

On a donc $\boxed{\text{Sp}(\phi_n) = \{k(k+1), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}}$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $E_{k(k+1)}(\phi_n) = \text{Vect}(L_k)$.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k(k+1) \in \text{Sp}(\phi_k)$, pour tout $P \in \text{Vect}(L_k) = E_{k(k+1)}(\phi_k)$,

$$\phi(P) = \phi_k(P) = k(k+1)P,$$

donc P est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre $k(k+1)$.

On a donc $\{k(k+1), k \in \mathbb{N}\} \subset \text{Sp}(\phi)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Vect}(L_k) \subset E_{k(k+1)}(\phi)$.

• Réciproquement, soit λ une valeur propre de ϕ et $P \neq 0$ un vecteur propre associé à λ .

Soit $n = \deg(P)$. Alors

$$\lambda P = \phi(P) = \phi_n(P),$$

donc P est un vecteur propre de ϕ_n associé à la valeur propre (de ϕ_n) λ .

Par suite, $\lambda \in \text{Sp}(\phi_n)$, donc il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\lambda = k(k+1)$ et $P \in E_{k(k+1)}(\phi_n) = \text{Vect}(L_k)$.

On a donc $\text{Sp}(\phi) \subset \{k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_{k(k+1)}(\phi) \subset \text{Vect}(L_k)$.

• Par double inclusion,

$$\boxed{\text{Sp}(\phi) = \{k(k+1), k \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad E_{k(k+1)}(\phi) = \text{Vect}(L_k).}$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

15. • Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ existe car $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1, 1]$.

• Pour tout $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle (\lambda P + Q), R \rangle &= \int_{-1}^1 (\lambda P + Q)(t)R(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 \lambda P(t)R(t) + Q(t)R(t)dt \\ &= \lambda \int_{-1}^1 P(t)R(t)dt + \int_{-1}^1 Q(t)R(t)dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle, \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

• Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^1 Q(t)P(t)dt = \langle Q, P \rangle,$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

• $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.

• Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale (bornes dans le bon sens), donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positif.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$.

Comme $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ et $-1 < 1$,

$$\langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1], P(t) = 0.$$

Par suite, P a une infinité de racines, donc P est nul.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc défini.

• $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

16. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle \phi(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t)dt.$$

Posons $u'(t) = (t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t)$, $u(t) = (t^2 - 1)P'(t)$, $v(t) = Q(t)$, $v'(t) = Q'(t)$.

Comme u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t)dt \\ &= \underbrace{[(t^2 - 1)P'(t)Q(t)]_{-1}^1}_{=0} - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt. \end{aligned}$$

Cette dernière écriture étant symétrique en P et Q , on obtient :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = \langle \phi(Q), P \rangle \stackrel{\text{par symétrie de } \langle \cdot, \cdot \rangle}{=} \langle P, \phi(Q) \rangle.$$

17. Soit k et n deux entiers naturels distincts. On a :

$$\begin{aligned} k(k+1)\langle L_k, L_n \rangle &= \langle k(k+1)L_k, L_n \rangle \quad (\text{linéarité à gauche}) \\ &= \langle \phi(L_k), L_n \rangle \quad (\text{car } L_k \in E_{k(k+1)}(\phi)) \\ &= \langle L_k, \phi(L_n) \rangle \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \langle L_k, n(n+1)L_n \rangle \quad (\text{car } L_n \in R_{n(n+1)}(\phi)) \\ &= n(n+1)\langle L_k, L_n \rangle \quad (\text{linéarité à droite}), \end{aligned}$$

donc $(k(k+1) - n(n+1))\langle L_k, L_n \rangle = 0$, donc $\langle L_k, L_n \rangle = 0$, car, comme $(k(k+1))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante (cf. question 10), $k(k+1) \neq n(n+1)$.

La famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme (L_0, \dots, L_{n-1}) est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (cf. question 3), pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe n réels a_0, \dots, a_{n-1}

tels que $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i$. Par suite,

$$\begin{aligned} \langle P, L_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i, L_n \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \langle L_i, L_n \rangle \quad (\text{linéarité à gauche}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 0 \quad (\text{car, pour tout } i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, i \neq n \text{ et d'après la question 17}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

19. • Soit k et n deux entiers naturels distincts. On a :

$$\langle Q_k, Q_n \rangle = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \langle L_k, L_n \rangle = 0,$$

donc la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

• De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Q_n\| \stackrel{\text{homogénéité}}{=} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \|L_n\| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \sqrt{\frac{2}{2n+1}} = 1,$$

donc $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

• De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, en posant $n = \deg(P)$, il existe a_0, \dots, a_n tels que $P = \sum_{i=0}^n a_i L_i = \sum_{i=0}^n \left(a_i \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \right) Q_i$,

donc la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Comme elle est de plus libre (car orthogonale), c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

• $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

20. Soit $n \in \mathbb{N}$.

• $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$.

Donc, d'après la caractérisation par la distance du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$ et T_n est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$.

• D'après le théorème de Pythagore,

$$\|P\|^2 = \|T_n\|^2 + \|P - T_n\|^2,$$

donc

$$\begin{aligned} d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 &= \|P - T_n\|^2 = \|P\|^2 - \|T_n\|^2 \\ &= \|P\|^2 - \left\| \sum_{k=0}^n \langle P, Q_k \rangle Q_k \right\|^2 \quad (\text{caractérisation du projeté orthogonal dans une base orthonormée}) \\ &= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^n \langle P, Q_k \rangle^2 \quad (\text{car } (Q_k) \text{ est une famille orthonormale}) \\ &= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^n (c_k(P))^2, \quad \text{où } c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle. \end{aligned}$$

21. • On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (c_k(P))^2 = \|P\|^2 - d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 \leq \|P\|^2$.

• De plus, la suite $\left(\sum_{k=0}^n (c_k(P))^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc elle converge (croissante et majorée par $\|P\|^2$).

• Par suite, la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.

Remarque. Je pense que la preuve ci-dessus est celle attendue, mais il y a plus simple et on aboutit en plus à un résultat plus précis...

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $n = \deg(P)$.

Alors, pour tout $k > n$, $\langle P, Q_k \rangle = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \langle P, L_k \rangle = 0$ (d'après la question 18)

D'où $\sum (c_k(P))^2$ converge (car $(c_k(P))^2$ est nul au-delà d'un certain rang) et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 = \sum_{k=0}^n (c_k(P))^2 = \sum_{k=0}^n \langle P, Q_k \rangle^2 = \|P\|^2$$

car $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie IV - Fonction génératrice

Les racines du trinôme $X^2 - 2X - 1$ sont

$$r_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2},$$

donc $r = r_1$ et on a $r > 2$.

22. Soit $x \in [-1, 1]$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leq r^n$ (HR_n)

Initialisation : $L_0(x) = 1$ et $r^0 = 1$, donc on a bien HR_0 .

$|L_1(x)| = |x|$ et $r^1 = r$, donc, comme $r > 2$ et $|x| \in [0, 1]$, on a bien $|L_1(x)| \leq r^1$. On a bien HR_1 .

Hérédité : Soit $n \geq 1$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \leq n$.

Alors,

$$\begin{aligned}
|L_{n+1}(x)| &= \left| \frac{(2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)}{n+1} \right| \quad (\text{d'après la relation admise}) \\
&\leq \frac{(2n+1)|x| \cdot |L_n(x)| + n|L_{n-1}(x)|}{n+1} \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\
&\leq \frac{(2n+1)r^n + nr^{n-1}}{n+1} \quad (\text{car } |x| \leq 1 \text{ et d'après } HR_n \text{ et } HR_{n-1}) \\
&= \frac{2n+1}{n+1}r^n + \frac{n}{n+1}r^{n-1} \leq 2r^n + r^{n-1} \\
&= r^{n-1}(2r+1) = r^{n-1}r^2 \quad (\text{car } r^2 - 2r - 1 = 0) \\
&= r^{n+1}. \quad \text{On a bien } HR_{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leq r^n$ (et ce pour tout $x \in [-1, 1]$).

23. Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\text{Pour tout } t \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[,$$

$$|L_n(x)t^n| \leq r^n t^n = (rt)^n.$$

Or, $rt \in [0, 1[$, donc la série géométrique $\sum_{n \geq 0} (rt)^n$ converge, donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} |L_n(x)t^n|$ converge, donc

$\sum_{n \geq 0} L_n(x)t^n$ converge absolument, donc t est dans le disque ouvert de convergence.

Par suite, $\left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$ est inclus dans le disque ouvert de convergence, donc $R(x) \geq \frac{1}{r}$.

24. $S_x : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur son disque ouvert de convergence, donc en particulier sur $\left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$.

De plus, pour tout $t \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$,

$$S'_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1},$$

donc

$$\begin{aligned}
(1 - 2tx + t^2)S'_x(t) + (t - x)S_x(t) &= (1 - 2tx + t^2) \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2nxL_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} xL_n(x)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)L_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2nxL_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)L_{n-1}(x)t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} xL_n(x)t^n \\
&= \left(L_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)L_{n+1}(x)t^n \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} 2nxL_n(x)t^n + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)L_{n-1}(x)t^n - 0 \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1}(x)t^n - \left(xL_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} xL_n(x)t^n \right) \\
&= L_1(x) - xL_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)L_{n+1}(x) - 2nxL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x) + L_{n-1}(x) - xL_n(x))t^n \\
&= x - x + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{((n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x))}_{=0 \text{ d'après la relation vérifiée par } L_n} t^n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc S_x vérifie bien l'équation différentielle : $(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0$.

25. • Pour tout $x \in [-1, 1]$, pour tout $t \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$,

$$|2xt| \leq 2\frac{1}{r} \times 1 = \frac{2}{r} <_{\text{car } r > 2} 1 \leq 1 + t^2,$$

donc $1 - 2tx + t^2 > 0$.

Par suite,

$$(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{t - x}{1 - 2tx + t^2}y = 0.$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{t - x}{1 - 2tx + t^2}$ est $t \mapsto \frac{1}{2} \ln(1 - 2tx + t^2)$ (car $1 - 2tx + t^2 > 0$).

Les solutions de l'équation homogène $(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0$ sont donc de la forme :

$$t \mapsto C \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(1 - 2tx + t^2)\right) = \frac{C}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}.$$

• S_x est une solution de $(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0$ sur $\left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[, \quad S_x(t) = \frac{C}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}.$$

Enfin, $S_x(0) = L_0 = 1$, donc $\frac{C}{\sqrt{1}} = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

• On a donc bien,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}.$$

26. • En prenant $t = 0 \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$ dans l'égalité obtenue en 25, on obtient

$$\forall x \in [-1, 1], \quad L_0(x) = 1,$$

donc $L_0 - 1$ a une infinité de racines (tous les éléments de $[-1, 1]$), donc $L_0 - 1 = 0$, donc $L_0 = 1$.

• En dérivant la relation obtenue en 25, on obtient :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1} = -\frac{2(t-x)}{2(t^2 - 2xt + 1)\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}.$$

En prenant $t = 0 \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$, on obtient

$$L_1(x) = -\frac{-2x}{2} = x,$$

donc le polynôme $L_1 - X$ a une infinité de racines (les éléments de $[-1, 1]$), donc $L_1 - X = 0$, donc $L_1 = X$.

• En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)L_n(x)t^{n-2} = \dots \quad (\text{calcul inutile, on veut juste l'idée})$$

En prenant $t = 0 \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$, on va obtenir

$$2L_2(x) = 3x^2 - 1 \text{ (vu ce que l'on a obtenu en question 1),}$$

donc le polynôme $2L_2 - 3X^2 + 1$ a une infinité de racines (les éléments de $[-1, 1]$), donc $2L_2 - 3X^2 + 1 = 0$, donc

$$L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1).$$

Partie V - Expression intégrale des polynômes de Legendre

27. Soit $t \in]-1, 1[$.

Pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} |v_n(u)| &= |t|^n |\cos \theta + i \sin \theta \cos u|^n = |t|^n \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 u}^n \\ &\leq |t|^n \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}^n = |t|^n \times 1^n = |t|^n, \end{aligned}$$

donc $\|v_n\|_{\infty}^{[-\pi, \pi]} \leq |t|^n$.

Or, $\sum_{n \geq 0} |t|^n$ converge (géométrique de raison $|t| \in [0, 1[$), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes

positifs, $\sum_{n \geq 0} \|v_n\|_{\infty}^{[-\pi, \pi]}$ converge.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge donc bien normalement sur $[-\pi, \pi]$.

28. • Pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (t \cos \theta + it \sin \theta \cos u)^n = \frac{1}{1 - t \cos \theta - it \sin \theta \cos u}$$

(série géométrique de raison $t \cos \theta + it \sin \theta \cos u$ de module $|t| < 1$).

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $[-\pi, \pi]$ par opérations sur les fonctions usuelles.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-\pi, \pi]$.

On peut donc intervertir série et intégrale et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta) t^n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} v_n(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t \cos \theta - it \sin \theta \cos u}.$$

29. $\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Posons le changement de variable affine $v = \pi - u$. on a $dv = -du$ et

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = \int_{\pi}^0 \frac{\cos(\pi - v)}{1 + a^2 \cos^2(\pi - v)} (-dv) = \int_0^{\pi} \frac{-\cos v}{1 + a^2 \cos^2 v} dv = - \int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du,$$

donc $2 \int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 0$, donc $\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 0$.

30. $\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + a^2 \cos^2 u}$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur $[0, \pi/2]$.

Posons le changement de variable $u = \arctan(v) \Leftrightarrow v = \tan(u)$.

Ce changement de variable est de classe \mathcal{C}^1 strictement croissant sur $[0, \pi/2[$, donc il réalise une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$. De plus, $du = \frac{1}{1 + v^2} dv$.

Enfin, $\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + a^2 \cos^2 u}$ converge, donc, en effectuant ce changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + a^2 \cos^2 u} &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dv}{1 + v^2}}{1 + a^2 \cos^2(\arctan v)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dv}{1 + v^2}}{1 + a^2 \frac{1}{1 + v^2}} \quad (\text{car } \cos(\arctan(v)) = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1 + v^2 + a^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + a^2} \frac{1}{1 + \frac{v^2}{1 + a^2}} dv \\ &= \frac{1}{1 + a^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{\sqrt{1 + a^2}}\right)^2} dv = \frac{1}{1 + a^2} \left[\sqrt{1 + a^2} \arctan \left(\frac{v}{\sqrt{1 + a^2}} \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}. \end{aligned}$$

31. • Pour tout $t \in]-1, 1[$, pour tout $\theta \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t \cos \theta - it \sin \theta \cos u} &= \frac{1}{1 - t \cos \theta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - i \left(\frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta} \right) \cos u} \quad (\text{car } |t \cos \theta| < 1, \text{ donc } 1 - t \cos \theta > 0) \\ &= \frac{1}{1 - t \cos \theta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + i \left(\frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta} \right) \cos u}{1 + \left(\frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta} \right)^2 \cos^2 u} du \\ &= \frac{1}{1 - t \cos \theta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta} \right)^2 \cos^2 u} du + i \frac{1}{1 - t \cos \theta} \frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos u}{1 + \left(\frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta} \right)^2 \cos^2 u} du \quad (*). \end{aligned}$$

- D'après la question 29, pour tout $a > 0$, $\int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 0$, donc, comme $u \mapsto \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u}$ est paire,

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 2 \int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 0.$$

- D'après la question 30, pour tout $a > 0$, $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + a^2 \cos^2 u} du = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$, donc, comme $u \mapsto \frac{1}{1 + a^2 \cos^2 u}$ est paire,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = \pi \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Enfin, $u \mapsto \frac{1}{1 + a^2 \cos^2 u}$ est π -périodique, donc

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du &= \int_{-\pi}^0 \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du + \int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 2\pi \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}. \end{aligned}$$

car si f est T -périodique, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt$.

- Alors, en posant $a = \frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta} > 0$ (car $|t \cos \theta| < 1$), et en réinjectant dans (*), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \frac{du}{1 - t \cos \theta - it \sin \theta \cos u} &= \frac{1}{1 - t \cos \theta} \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{1 + a^2 \cos^2 u} du + i \frac{1}{1 - t \cos \theta} \frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta} \underbrace{\int_{-\pi}^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du}_{=0} \\ &= \frac{1}{1 - t \cos \theta} 2\pi \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta}\right)^2}} \\ &= 2\pi \frac{1}{\sqrt{(1 - t \cos \theta)^2 + t^2 \sin^2 \theta}} \\ &= 2\pi \frac{1}{\sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}}. \end{aligned}$$

32. Soit $\theta \in [0, \pi]$.

$x = \cos(\theta) \in [-1, 1]$, donc, pour tout $t \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} L(\cos \theta) t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t \cos \theta + 1}}$ d'après la question 25.

D'après les questions 28 et 31, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta) t^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{du}{1 - t \cos \theta - it \sin \theta \cos u} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t \cos \theta + 1}}.$$

- D'où, par unicité du développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t \cos \theta + 1}}$ sur $\left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[\subset]-1, 1[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(\cos \theta) = w_n(\theta).$$

33. Par suite, pour tout $x \in [-1, 1]$, en posant $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos \theta = x$, on a, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t \cos \theta + 1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta) t^n \quad (\text{d'après les question 31 et 28}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} L(\cos \theta) t^n \quad (\text{d'après la question 32}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n \quad (\text{par définition de } \theta). \end{aligned}$$

34. • D'après la question précédente, on a $R(x) \geq 1$.

• Supposons $R(x) > 1$.

Le rayon de convergence de $z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n$ est $R(x) > 1$.

Le rayon de convergence de $z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 - 2xz + 1$ est $+\infty$ (c'est un polynôme, que l'on voit comme une série entière).

Par produit de Cauchy de séries entières, $z \mapsto (z^2 - 2tz + 1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n \right)^2$ est une série entière de rayon de convergence $\geq R(x)$, donc il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (comme somme et produit de nombres réels dans le produit de Cauchy) telle que,

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < R(x), \quad (z^2 - 2xz + 1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

En particulier, pour tout $t \in]-R(x), R(x)[$, $(t^2 - 2xt + 1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$.

Or, pour tout $t \in]-1, 1[$, $(t^2 - 2xt + 1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \right)^2 = 1$ d'après la question précédente.

Or 1 est son propre développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$, donc, par unicité du développement en série entière sur $] -1, 1[$ de $t \mapsto (t^2 - 2xt + 1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \right)^2$, on a

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, b_n = 0.$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R(x)$, $(z^2 - 2xz + 1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n \right)^2 = 1$.

Or, en posant $x = \cos \theta$ (possible car $x \in [-1, 1]$), $z^2 - 2xz + 1 = 0$ a pour solutions :

$$z_1 = \frac{2 \cos \theta + 2i \sin \theta}{2} = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-i\theta} \quad (\text{car } \Delta = 4 \cos^2(\theta) - 4 = (2i \sin \theta)).$$

Par suite, pour $z = e^{i\theta}$, on a $|z| < R(x)$ (car on a supposé $R(x) > 1$) et $\underbrace{(z^2 - 2xz + 1)}_{=0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n \right)^2 = 0$.

C'est exclu, donc, par l'absurde, $R(x) \leq 1$.

• On a donc $R(x) \leq 1$ et $R(x) \geq 1$, donc $R(x) = 1$.

Partie VI - Application à l'approximation d'intégrales

35. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 2$ "si f est une fonction de classe \mathcal{C}^{n-1} sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} telle qu'il existe n réels $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, h(\alpha_i) = 0$, alors il existe un réel c tel que $f^{(n-1)}(c) = 0$ " (HR_n)

Initialisation Pour $n = 2$, f est supposée continue et dérivable sur \mathbb{R} , donc sur $[\alpha_1, \alpha_2]$. En appliquant le théorème de Rolle, on obtient l'existence de $c \in]\alpha_1, \alpha_2[\subset \mathbb{R}$ tel que $f^{(1)}(c) = 0$. On a donc bien HR_2 .

Hérédité : Soit $n \geq 2$ et supposons HR_n vérifiée.

Soit alors une fonction f de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} et $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ $n + 1$ réels en lesquels f s'annule.

Alors, en appliquant le théorème de Rolle à f sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, on obtient l'existence de n réels distincts $\beta_1 < \dots < \beta_n$ en lesquels f' s'annule, avec f' fonction de classe \mathcal{C}^{n-1} .

En appliquant HR_n à f' , on obtient l'existence d'un $c \in \mathbb{R}$ tel que $(f')^{(n-1)}(c) = 0$, et donc $f^{(n)}(c) = 0$.

On a bien HR_{n+1} .

Conclusion : La propriété est donc établie par récurrence.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geq 2$, donc on a HR_{2n} , qui n'est autre que la propriété à démontrer.

36. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si $\sum_{i=1}^n a_i \ell_i = 0$, alors, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\sum_{i=1}^n a_i \ell_i(P) = 0$.

Soit, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (X - x_i) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et

$$\sum_{i=1}^n a_i \ell_i(P_j) = \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{P_j(x_i)}_{=0 \text{ si } i \neq j} = a_j P_j(x_j),$$

donc, comme $\sum_{i=1}^n a_i \ell_i(P) = 0$, on a $a_j P_j(x_j) = 0$, donc $a_j = 0$ car $P_j(x_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \underbrace{(x_j - x_i)}_{\neq 0} \neq 0$ (car les x_i sont deux à deux distincts).

Ceci étant valable pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a bien la liberté.

37. La famille (ℓ_1, \dots, ℓ_n) est donc libre.

De plus, elle est formée de n éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension n , donc c'est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.

Par suite, pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans \mathbb{R} , il existe un unique n -uplet $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \sum_{k=1}^n \beta_k \ell_k$.

38. $\varphi : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \int_{-1}^1 P(t) dt$ est une application linéaire (par linéarité de l'intégrale) de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans \mathbb{R} .

Donc, d'après la question précédente, il existe un unique n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels tel que $\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \ell_k$, ie

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 P(t) dt = \varphi(P) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \ell_k(P) = \alpha_1 P(x_1) + \dots + \alpha_n P(x_n).$$

39. • Pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, il existe un unique couple (Q, R) avec $\deg(R) < \deg(L_n) = n$ tel que $P = QL_n + R$.
De plus, comme $QL_n = P - R$ où $\deg(L_n) = n$ et $\deg(P - R) \leq 2n - 1$, on a $\deg(Q) \leq n - 1$, donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Alors, en reprenant le n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ trouvé à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(t) dt &= \int_{-1}^1 Q(t)L_n(t) dt + \int_{-1}^1 R(t) dt \\ &= \langle Q, L_n \rangle + \int_{-1}^1 R(t) dt \quad (\text{par définition du produit scalaire introduit en partie III}) \\ &= 0 + \int_{-1}^1 R(t) dt \quad (\text{d'après la question 18 avec } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]) \\ &= \alpha_1 R(x_1) + \dots + \alpha_n R(x_n) \quad (\text{car } R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]) \end{aligned}$$

et, comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(x_i) = Q(x_i) \underbrace{L_n(x_i)}_{=0} + R(x_i) = R(x_i)$, on a bien

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \alpha_1 R(x_1) + \dots + \alpha_n R(x_n) = \alpha_1 P(x_1) + \dots + \alpha_n P(x_n).$$

40. • Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n))$.

C'est une application linéaire (dit dans l'énoncé).

Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(x_i) = P'(x_i) = 0$, donc x_i est une racine au moins double de P .
Comptées avec multiplicité, P admet donc au moins $2n$ racines, donc, comme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a $P = 0$.

φ est donc injective.

• D'après le théorème du rang, on a alors

$$\dim \text{Im } \varphi = \dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] - \dim \ker \varphi = 2n = \dim \mathbb{R}^{2n}$$

et $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}^{2n}$, donc $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^{2n}$ et φ est donc surjective.

• φ est injective et surjective, donc bijective.

• Par suite, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\begin{aligned} \left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} P(x_i) = f(x_i) \\ P'(x_i) = f'(x_i) \end{cases} \right) &\Leftrightarrow \varphi(P) = (f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)) \\ &\Leftrightarrow P = \varphi^{-1}(f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)), \end{aligned}$$

ce qui assure l'existence et l'unicité de H_n .

41. Soit $x \in [-1, 1]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \neq x_i$.

$$\text{Soit } g : t \in [-1, 1] \mapsto f(t) - H_n(t) - \underbrace{\frac{A_n(t)^2}{(2n)!} \times \frac{(2n)!}{A_n(x)^2}}_{=K} (f(x) - H_n(x)).$$

g est bien définie car $A_n(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ \neq 0}}^n (x - x_i) \neq 0$.

On renumérote (x_1, \dots, x_n, x) en (y_1, \dots, y_{n+1}) de telle sorte que $y_1 < \dots < y_{n+1}$.

Alors, comme

$$\text{--- } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, g(x_i) = \underbrace{f(x_i) - H_n(x_i)}_{=0} - \frac{\overbrace{A_n(x_i)^2}^{=0}}{(2n)!} \times K = 0$$

$$\text{--- et } g(x) = f(x) - H_n(x) - \frac{A_n(x)^2}{(2n)!} \times \frac{(2n)!}{A_n(x)^2} (f(x) - H_n(x)) = 0,$$

on a $g(y_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

g est de classe \mathcal{C}^{2n} sur $[-1, 1]$, donc, comme $n \geq 1$, g est continue et dérivable sur $[-1, 1]$, donc sur $[y_i, y_{i+1}]$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

D'après le théorème de Rolle, appliqué sur chaque intervalle, il existe n réels β_1, \dots, β_n tels que

$$y_1 < \beta_1 < y_2 < \dots < \beta_n < y_{n+1} \quad \text{et} \quad g'(\beta_i) \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Par construction, la famille $\beta_1, \dots, \beta_n, x_1, \dots, x_n$ est formée de $2n$ éléments de $[-1, 1]$ deux à deux distincts.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\text{--- } g'(\beta_i) = 0$$

$$\text{--- et } g'(x_i) = \underbrace{f'(x_i) - H'_n(x_i)}_{=0} - \frac{2A'_n(x_i) \overbrace{A_n(x_i)}^{=0}}{(2n)!} K = 0,$$

donc g' s'annule (au moins) $2n$ fois sur $[-1, 1]$ et, comme

--- f' est de classe \mathcal{C}^{2n-1} sur $[-1, 1]$ (car f est de classe \mathcal{C}^{2n})

--- et H'_n , A_n et A'_n sont de classe \mathcal{C}^∞ (ce sont des fonctions polynomiales),

g' est de classe \mathcal{C}^{2n-1} sur $[-1, 1]$.

D'où, d'après la question 35, adaptée sans difficulté à une fonction de $[-1, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , il existe $c \in [-1, 1]$ tel que $(g')^{(2n-1)}(c) = 0 \Leftrightarrow g^{(2n)}(c) = 0$.

$$\text{Or, } g^{(2n)} = f^{(2n)} - H_n^{(2n)} - \frac{(A_n^2)^{(2n)}}{(2n)!} K, \text{ où}$$

--- $H_n^{(2n)} = 0$ car $H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

--- et $(A_n^2)^{(2n)} \in \mathbb{R}_0[X]$ (car $\deg(A_n^2) = 2n$), et une récurrence similaire à celle de la question 2, poussée jusqu'à $k = 2n$, donne $A_n^{(2n)} = (2n)!$,

donc $g^{(2n)}(c) = f^{(2n)}(c) - K$, et donc

$$K = f^{(2n)}(c) \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{A_n(x)^2} (f(x) - H_n(x)) = f^{(2n)}(c) \Leftrightarrow f(x) = H_n(x) + \frac{A_n(x)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c).$$

42. Pour tout $y \in [-1, 1]$,

--- si $y \neq x_i$, alors c existe d'après la question précédente

--- si $y = x_i$, alors $f(y) - H_n(y) = 0$ et $A_n(y) = 0$, donc c quelconque dans $[1, 1]$ convient.

43. • $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur $[-1, 1]$, donc $M_{2n}(f) = \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n)}(t)|$ existe.

• Reprenons H_n comme à la question 40. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 f(t) dt - (\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)) \right| &= \left| \int_{-1}^1 f(t) dt - \int_{-1}^1 H_n(t) dt \right| \quad (\text{d'après la question 39 avec } H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]) \\ &= \left| \int_{-1}^1 f(t) - H_n(t) dt \right| \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [-1, 1]$, il existe $c_t \in [-1, 1]$ tel que

$$|f(t) - H_n(t)| = \left| \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c_t) \right| \leq \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} \times M_{2n}(f),$$

donc, par positivité de l'intégrale (avec $-1 \leq 1$),

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 f(t) dt - (\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)) \right| &= \left| \int_{-1}^1 f(t) - H_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} M_{2n}(f) dt = \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt. \end{aligned}$$

44. Par définition de A_n ,

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt &= \frac{1}{a_n^2} \langle L_n, L_n \rangle = \frac{1}{a_n^2} \frac{2}{2n+1} \quad (\text{admis en question 9}) \\
 &= 2^{2n} \frac{(n!)^4}{((2n)!)^2} \frac{2}{2n+1} \sim 2^{2n} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n} \sqrt{2\pi n^4}}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} \sqrt{2\pi 2n^2}} \frac{1}{n} \quad (\text{Stirling : } n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}) \\
 &= 2^{2n} \frac{4\pi^2 n^2}{2^{4n} 4\pi n} \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4^n}.
 \end{aligned}$$