CCP 2018 - Corrigé

Partie I - Quelques résultats généraux

1. $U_0 = 1$ et $L_0 = \dfrac{1}{2^0 0!} U_0^{(0)} = 1$.
   $U_1 = (X^2-1)$ et $L_1 = \dfrac{1}{2^1 1!} U_1^{(1)} = \dfrac{1}{2}(2X) = X$.
   $U_2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = \dfrac{1}{2^2 2!} U_2^{(2)} = \dfrac{1}{8}(4X^3 - 4X)' = \dfrac{1}{8}(12X^2 - 4) = \dfrac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

2. • Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(U_n^{(k)}) = 2n - k$ et $\mathrm{cd}(U_n^{(k)}) = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$ (HR_k).

   Initialisation : $U_n^{(0)} = U_n = (X^2-1)^n = X^{2n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(X^2)^k$ est bien un polynôme de degré $2n-0$ ayant pour coefficient dominant 1.
   Hérédité : Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et supposons HR_k vérifiée.
   Alors $U_n^{(k)}$ est de degré $2n-k$ et a pour coefficient dominant $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}_{2n-k-1}[X]$ tel que

   $$U_n^{(k)} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)\right) X^{2n-k} + Q,$$

   donc

   $$\begin{aligned} U_n^{(k+1)} &= \left(\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)\right)(2n-k)X^{2n-k-1} + Q' \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k}(2n-i)\right) X^{2n-k-1} + \underbrace{Q'}_{\in \mathbb{R}_{2n-k-2}[X]} \end{aligned}$$

   donc $U_n^{(k+1)}$ est bien un polynôme de degré $2n-(k+1)$ et de coefficient dominant $\left(\displaystyle\prod_{i=0}^{k+1-1}(2n-i)\right) X^{2n-k} + Q$. On a bien HR_{k+1}.
   Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $U_n^{(k)}$ est de degré $2n-k$ et a pour coefficient dominant $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$.
   • Par suite, $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$ est de degré $2n - n = n$ et a pour coefficient dominant :

   $$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^n n!}\prod_{i=0}^{n-1}(2n-i) = \frac{1}{2^n n!}\prod_{i=n+1}^{2n} i \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

3. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre (degrés échelonnés) et elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, donc $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$, donc U_n a deux racines, -1 et 1, de multiplicité n.
   • Comme $U_n = (X^2-1)^n$, $U_n' = n(2X)(X^2-1)^{n-1} = 2n(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-0)$, donc, en prenant $\lambda = 2n$ et $\alpha = 0 \in]-1, 1[$, on a bien

   $$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

   Remarque. Promis, je n'ai pas fait exprès de les déterminer, ils sont apparus tous seuls, comme des grands...
   L'énoncé attendait certainement une autre méthode, que je vais mettre en oeuvre ci-dessous

   • Comme -1 et 1 sont racines de multiplicité n de U_n, elles sont racines de multiplicité $n-1$ de U_n', donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

   $$U_n' = (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}Q.$$

Comme $\deg(U_n') = \deg(U_n) - 1 = 2n - 1$ et $\deg((X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}) = 2n - 2$, on a $\deg(Q) = 1$.
On a $U_n(1) = U_n(-1)$ où U_n est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ (c'est un polynôme !), donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]-1, 1[$ tel que $U_n'(\alpha) = 0$. Or, $U_n'(\alpha) = \underbrace{(\alpha-1)^{n-1}(\alpha+1)^{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } \alpha \neq \pm 1} Q(\alpha)$, donc on a $Q(\alpha) = 0$.
Comme on a aussi $\deg(Q) = 1$ et $Q(\alpha) = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda(X - \alpha)$ et on a donc

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

5. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

On supposera de plus, quitte à renuméroter, que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$.
• Alors, comme -1 et 1 sont racines de multiplicité $n - k \geq 1$ de $U_n^{(k)}$, -1 et 1 sont racines de multiplicité $n - k - 1$ de $(U_n^{(k)})' = U_n^{(k+1)}$, donc il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U_n^{(k+1)} = (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k+1}Q$.
• Comme $\deg(U_n^{(k+1)}) = 2n - k - 1$ et $\deg((X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k+1}) = 2n - 2k - 2$, on a $\deg(Q) = k + 1$.
• Posons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$. Alors on a $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \alpha_{k+1}$.
Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $U_n^{(k)}$ est continu sur $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, dérivable sur $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ (polynôme) et $U_n^{(k)}(\alpha_{k-1}) = U_n^{(k)}(\alpha_k) \quad (= 0)$.
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ tel que $(U_n^{(k)})'(\beta_k) = 0 \Leftrightarrow U_n^{(k+1)}(\beta_k) = 0$.
On a de plus, par construction,

$$-1 = \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \cdots < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1,$$

donc les réels $(\beta_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ sont deux à deux distincts.
• Pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = \underbrace{(\beta_i - 1)^{n-1}(\beta_i + 1)^{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } \beta_i \neq \pm 1} Q(\beta_i)$, donc, comme $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$, on a $Q(\beta_i) = 0$, et donc β_i est une racine de Q.
• Q est un polynôme de degré $k + 1$ qui admet pour racines (distinctes !) $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$, donc il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \nu(X - \beta_1)\cdots(X - \beta_{k+1})$, et donc

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

6. • Les questions 4 (initialisation pour $k = 1$) et 5 (hérédité pour $k \in [\![0, n-1]\!]$) permettent de démontrer par récurrence que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ_k tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu_k(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

• En particulier, pour $k = n$, il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ_n tels que :

$$\begin{aligned} L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)} &= \frac{1}{2^n n!} \mu_n (X-1)^{n-n}(X+1)^{n-n}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \mu_n (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n), \end{aligned}$$

donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont n racines distinctes de L_n, et toutes ces racines sont dans $]-1, 1[$.
En les ordonnant, on a bien l'existence des réels $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ tels que

$$L_n = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

car L_n est de degré n et de coefficient dominant a_n.