*exercices corrigés : 18, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 13*

# I. Nouvel exercice du 6 et 7/11/2023

**Exercice 18** *Somme des polynômes de Lagrange* ✰✰

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow x_j \neq x_j$.

On note, pour $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i$ le $i$ème polynôme d'interpolation de Lagrange défini par

$$L_i = \frac{1}{\prod_{0 \le j \le n,\ j \neq i}(x_i - x_j)} \times \prod_{0 \le j \le n,\ j \neq i} (X - x_j)$$

Démontrer que

$$\boxed{1 = \sum_{i=0}^{n} L_i}$$

# II. Exercices du TD d'origine

**Exercice 3** ✰

Calculer : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 2 & & & 2^{n-1} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & n & & & n^{n-1} \end{vmatrix}$ ;

**Exercice 4** ✰

Trouver un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, après avoir calculé $(M - I_3)$, $(M - I_3)^2$, $M(M - I_3)^2$.

**Exercice 6** ✰✰

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des $1$.

1. Calculer $J^2$.
2. En déduire un polynôme $Q$ annulateur de $J$.
3. En déduire la valeur de $J^k$ pour tout $k \geq 2$, en fonction de $I_n, J$ et $k$.

**Exercice 7** ✰✰ *polynômes d'interpolation de Lagrange*

Soient $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

Posons pour j$\in [\![0, 2]\!]$, $L_j = \displaystyle\prod_{0 \le i \le 2, i \neq j} \frac{1}{a_j - a_i}(X - a_i)$

1. Vérifier que $L_p(a_q) = \delta_p^q$, pour tout $p, q \in [\![0, 2]\!]$
2. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (L_0, L_1, L_2)$ est libre.
3. En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Donner la décompostion de $S = 1 + X$ dans cette base.
5. $S$ est-il l'unique polynôme de degré au plus $2$ valant $1$ en 0, 3 en 2 et 9 en 8 ? Même question parmi les polynômes de degré au plus $3$.

**Exercice 8**

Donner un polynôme réel $P$ de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = 2$ et $P(1) = 3$. Est-il unique ?

## Exercice 10 ☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts.

On définit $V_n(x_0,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ et le vecteur $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$.

1) Exprimer le produit $V_n(x_0,\dots,x_n).A$ à l'aide du polynôme $P$.

2) A l'aide d'un développement selon une ligne, justifier que $f : z \longmapsto V(x_0,\dots,x_{n-1},z)$ est polynomiale de degré $n$ et de coefficient dominant $V_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1})$.

3) On vérifie directement que pour $z \in \{x_0,\dots,x_{n-1}\}$, $f(z) = 0$ car le déterminant contient deux lignes égales, donc $\prod_{j=0}^{n-1}(z-x_j)$ divise $f(z)$, expression polynomiale en $z$ de degré $n$. Donc $f(z) = \det(V_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1})) \times \prod_{i=0}^{n-1}(z-x_i)$, compte-tenu de la valeur du coefficient dominant.

Ainsi $\det(V_n(x_0,\dots,x_n)) = \det(V_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1})) \times \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)$

Par récurrence on en déduirait que $\det(V_n(x_0,\dots,x_n)) = \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)\right)$

4) Soit $(r_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts tel que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(r_k) \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la question 1, que $P$ est dans $\mathbb{R}[X]$.

## Exercice 13 ☆☆

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer $(M - I_3)^3$ et en déduire le calcul de $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

# Notes

18

correction exercice 18 :

On note $P=1$ et $Q=\sum_{i=0}^{n} L_i$.

Ils s'agit de deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et on vérifie que pour $0 \leq ken$, $P(x_k)=1=L_k(x_k)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x_k)$, car $L_i(x_k)=\delta_i^k,\ \forall 0 \leq i \leq n$.

Donc $P$ et $Q$ coïncident en $n+1$ valeurs distinctes et sont de degrés au plus $n$, donc sont égaux, d'où $\boxed{1=\sum_{i=0}^{n} L_i}$

3

correction exercice 3 : on reconnait le déterminant de Vandermonde $V(1,2,\ldots n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(j-i)$

4

correction exercice 4 :

On vérifie que $M(M-I_3)^2=0_3$, donc $X(X-1)^2$, polynôme non nul est annulateur de $M$.

6

correction exercice 6 :

$J^2=nJ$, $Q=X^2-nX\ X^k=B_kQ+R_k$, avec $\deg(R_k)\leq 1$ par division euclidienne

donc $J^k=a_kI_n+b_kJ$ avec en évaluant :
en $0$, $0=0^k+a_k$ ; en $1/n$, $1/n^k=b_k/n$
d'où $J^k=\dfrac{1}{n^{k-1}}J$

7

correction exercice 7 :

1. On vérifie immédiatement que $a_q$ est racine de $L_p$ si $q\neq$, et $L_p(a_p)=1$.
2. si $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ sont trois scalaires tels que $\sum_{i=0}^{2}\lambda_i L_i=0$, alors en évaluant en $a_q$ pour $q\in[\![0,2]\!]$, on obtient : $\lambda_q=0$, donc la famille $\mathcal{F}$ est libre, et comme elle est de cardinal $3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension $3$, on en déduit qu'elle est libre, donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. $S=\sum_{p=0}^{n} S(a_p)L_p=L_0+2L_1+3L_2$ est la décompostion de $S=1+X$ dans cette base.
4. $S$ est l'unique polynôme de degré au plus $2$ valant $1$ en 0, 3 en 2 et 9 en 8, par unicité de la décomposition

dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

$S$ n'est pas l'unique polynôme de degré au plus 3 valant 1 en 0, 3 en 2 et 9 en 8, car par exemple en fixant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur $n$ en 3, et et en notant $N_0, N_1, N_2, N_3$ la base de $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de Lagrange en $0, 2, 8, 3$, le polynôme $T_n = 1N_0 + 3N_1 + 9N_2 + nN_3$ convient pour tout $n \in \mathbb{N}$

8

correction exercice 8 :

D'après le cours $P = 1\dfrac{(X-0)(X-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 2\dfrac{(X+1)(X-1)}{(0+1)(0-1)} + 3\dfrac{(X+1)(X-0)}{(1+1)(1-0)} =$ convient, et est unique dans $\mathbb{R}_2[X]$.

10

correction exercice 10 :

1) $V_n(x_0, \ldots, x_n).A = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = B$

2) On développe selon la dernière ligne : $V(x_0, \ldots, x_{n-1}, z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} z^j D_j$, où $D_j$ est le déterminant obtenu en rayant la $n$ème ligne et la $j$ème colonne

On reconnait une expression polynomiale de degré $n-1$ et le coefficient dominant est $D_n = V_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

3) En déduire que $\det(V_n(x_0, \ldots, x_n)) = \det(V_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})) \times \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)$, puis donner l'expression factorisée de $\det(V_n(x_0, \ldots, x_n))$.

4) On a $V_n(x_0, \ldots, x_n).A = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = B$

Par hypothèse, $B$ est à composantes réelles, donc $A = V_n(x_0, \ldots, x_n)^{-1}B$ est à composantes réelles, donc les coefficients de $P$ sont réels et finalement $P$ est dans $\mathbb{R}[X]$.

13

correction exercice 13 :

On remarque que $P = (X-1)^3$ est annulateur de $M$.

En effectuant la division euclidienne de $X^n$ par $P$ por tout $n \in \mathbb{N}$, on sait qu'il existe un unique couple $(Q_n, R_n)$ de polynômes tel que

$$X^n = PQ_n + R_n \text{ et } \deg(R_n \leq 2$$

Donc en notant $R_n = a_n + b_nX + c_nX^2$, on obtient en dérivant $nX^{n-1} = P'Q_n + PQ'_n + R'_n$

puis en redérivant $n(n-1)X^{n-1} = P''Q_n + 2P'Q'_n + PQ''_n + R''_n$

En évaluant en $1$ on obtient $1 = a_n + b_n + c_n$

$n = b_n + 2c_n$

$n(n-1) = 2c_n$

Ce qui donne $R_n = (1 - n(3-2n) - n(n-1)) + (n - 2n(n-1))X + n(n-1)X^2$

et $M^n = (1 - n(3-2n) - n(n-1))I_3 + (n - 2n(n-1))M + n(n-1)M^2$