CCP2015 - PSI
Un corrigé

1 Quelques exemples d'étude d'un système différentiel

I.1. Le théorème indique que l'ensemble des solutions de (E) sur I est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

I.2. Posons $X\ :\ t \mapsto \alpha(t)V$ et raisonnons par conditions nécessaires puis suffisantes.

- Si X est solution de (E) alors, en considérant une coordoonnée non nulle de V (qui existe car $V \neq 0$ comme vecteur propre), disons V_i, on a $\alpha(t) = \frac{X_i(t)}{V_i}$ et α est donc dérivable. De plus, $X'(t) = \alpha'(t)V$ et $A(t)X(t) = \lambda(t)\alpha(t)X(t)$ et donc
$$\forall t \in I,\ \alpha'(t) = \lambda(t)\alpha(t) \tag{1}$$
- Réciproquement, si α est solution de (1) alors X est dérivable et le même calcul montre que c'est une solution de (E).

D'après le théorème fondamental si $t_0 \in I$, la fonction $t \mapsto \int_{t_0}^t \lambda(u)\ du$ est une primitive sur l'intervalle I de la fonction continue λ. Et d'après le cours, l'ensemble des solutions de (1) sur I est
$$\text{Vect}\left(t \mapsto e^{\int_{t_0}^t \lambda(u)\ du}\right)$$

I.3. On remarque que $A(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne un premier vecteur propre pour A. Comme la trace de $A(t)$ vaut $a+1-b$, SI il y a une second valeur propre, c'est $a-b$. En cherchant un élément du noyau de $A-(a-b)I_2$, on est amenés à trouver que $(a-1,b)$ est vecteur propre associé à la valeur propre $a-b$. Comme $\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b-a+1 \neq 0$ par hypothèse, nos deux vecteurs propres sont indépendants. La quetion précédente indique (on choisit $t_0 = 0$ et l'intégrale se calcule immédiatement puisque $\lambda(t)$ est une constante) que
$$X\ :\ t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } Y\ :\ t \mapsto e^{(a-b)t}\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$$
sont deux solutions de (E). L'indépendance des vecteurs propres donne l'indépendance des fonctions et, par dimension (X,Y) est une base de l'espace des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

I.5 Dans le cas $\mu = 1$, $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres de $A(t)$ associés aux valeurs propres $a(t)+b(t)$ et $a(t)-b(t)$. Ces deux vecteurs propres sont indépendants. En choisissant $t_0 \in I$ et en utilisant **I.2** on obtient deux solutions de (E) qui sont indépendantes car les vecteurs propres le sont. Par dimension, l'ensemble des solutions de (E) sur I est
$$\text{Vect}\left(t \mapsto e^{\int_{t_0}^t (a(u)+b(u))\ du}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{\int_{t_0}^t (a(u)-b(u))\ du}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

II. Etude de deux fonctions

II.1.1 f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et le seul problème d'intégrabilité est au voisinage de $+\infty$ où $f(t) = o(1/t^2)$ par croissances comparées et donc intégrable (comparaison aux fonctions de Riemann). Ainsi, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

II.1.2 f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, le théorème fondamental indique que $x \mapsto \int_0^x f$ est une primitive de f. C'est donc une fonction de classe C^1 dont f est la dérivée. Par théorèmes d'opérations, $F \in C^1(\mathbb{R}^+)$ et
$$\forall x \geq 0,\ F'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x xe^{-t^2}\ dt$$
Pour étudier G, on utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \geq 0,\ t \mapsto \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$ est continue sur $[0,1]$; elle est donc intégrable sur $[0,1]$ (qui est un segment).
- $\forall t \in [0,1],\ x \mapsto \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $x \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.
- $\forall x \geq 0,\ t \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$.
- $\forall a > 0,\ \forall x \in [0,a],\ \forall t \in [0,1],\ \left|-2xe^{-x^2(1+t^2)}\right| \leq 2a$. Le majorant est une fonction constante sur le segment $[0,1]$ et est donc intégrable sur ce segment.

Le théorème donne $G \in C^1([0,1])$ et

$$\forall x \geq 0,\ G'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2}\ dt$$

II.1.3 Pour $x > 0$, on peut poser $u = xt$ pour obtenir

$$G'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\ du = -F'(x)$$

et cette formule reste vraie pour $x = 0$ (elle se lit $0 = 0$). Ainsi, $(F+G)$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. On a donc

$$\forall x \geq 0,\ F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

II.1.4 Une majoration grossière donne $\forall x \geq 0,\ \forall t \in [0,1],\ 0 \leq \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \leq e^{-x^2}$ et donc $0 \leq G(x) \leq e^{-x^2}$. Ainsi (théorème d'encadrement)

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$$

Avec la question précédente, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

II.1.5 Mais comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable, on a aussi $F(x) \to (\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt)^2$ et, l'intégrale étant positive, ceci donne (en passant à la racine carrée)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

II.2.1 On utilise encore le théorème de régularité des intérales à paramètres.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^{-x+itx}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, équivalente à $1/\sqrt{x}$ en 0 et donc intégrable au voisinage de 0 et $o(e^{-x}) = o(1/x^2)$ en $+\infty$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$.
- $\forall x > 0,\ t \mapsto \frac{e^{-x+itx}}{\sqrt{x}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $t \mapsto i\sqrt{x}e^{-x+itx}$.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto i\sqrt{x}e^{-x+itx}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \left|i\sqrt{x}e^{-x+itx}\right| = \sqrt{x}e^{-x}$. Le majorant est continu sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème indique que $t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x+itx}}{\sqrt{x}}\ dx$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto \int_0^{+\infty} i\sqrt{x}e^{-x+itx}\ dx$. Ses parties réelle et imaginaire sont donc de classe C^1, c'est à dire que

$$u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

II.2.2 On vient de voir que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ w'(t) = i \int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x+itx}\ dx$$

On veut effectuer une intégration par parties en dérivant $x \mapsto \sqrt{x}$ en $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et en primitivant $x \mapsto e^{-x+itx}$ en $x \mapsto -\frac{e^{-x+itx}}{1-it}$ (fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$). Comme $\sqrt{x}\frac{e^{-x+itx}}{1-it}$ admet des limites finies en 0 et $+\infty$, l'intégration par parties est licite. Les limites évoquées étant nulles, elle donne

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x+itx}\, dx = \frac{1}{2(1-it)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1-it)}}{\sqrt{x}}\, dx$$

et on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ w'(t) = \frac{i}{2(1-it)} w(t) = \frac{1}{2(1+t^2)}(-t+i)w(t)$$

En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient des relations vérifiées par u et v qui s'écrivent, après calcul simple,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A(t)X(t) \ \text{ avec }\ A(t) = \frac{1}{2(1+t^2)} \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$$

II.2.3 Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$ est $\lambda^2 + 2t\lambda + (t^2+1)$. Les valeurs propres de cette matrices sont donc $-t+i$ et $-t-i$ et une résolution de système donne $(i,1)$ et $(-i,1)$ comme vecteurs propres. Ainsi,

$$A(t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-t+i}{2(1+t^2)}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(t)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-t-i}{2(1+t^2)}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a deux valeurs propres distinctes pour $A(t)$ et, comme on est en dimension 2 et que les sous-espaces propres sont en somme directe, on peut conclure qu'il y a deux valeurs propres et des sous-espaces propres de dimension 1 :

$$\mathrm{Sp}(A(t)) = \left\{ \frac{-t+i}{2(1+t^2)}, \frac{-t-i}{2(1+t^2)} \right\} = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\}$$

$$E_{\lambda_1(t)}(A(t)) = \mathrm{Vect}((i,1)),\ E_{\lambda_2(t)}(A(t)) = \mathrm{Vect}((-i,1))$$

II.2.4 On a

$$\int_0^t \lambda_1(u)\, du = -\frac{1}{4}\ln(1+t^2) + \frac{i}{2}\arctan(t)$$

$$\int_0^t \lambda_2(u)\, du = -\frac{1}{4}\ln(1+t^2) - \frac{i}{2}\arctan(t)$$

La question **I.2** montre que les deux fonctions

$$X_1 \ :\ t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^{1/4}} e^{\frac{i\arctan(t)}{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 \ :\ t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^{1/4}} e^{-\frac{i\arctan(t)}{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont solutions de (E_1). Elles sont indépendantes (les vecteurs propres le sont) et forment une base de l'ensemble des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. La solution générale de (E_1) est du type $\alpha X_1 + \beta X_2$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

II.2.5 Remarquons que (changement de variable $y = \sqrt{x}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ à dérivée ne s'annulant pas)

$$u(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$$

$$v(0) = 0$$

On a ainsi $X(0) = (\sqrt{\pi}, 0)$. Mais on sait aussi qu'il existe des constantes α, β telles que $X = \alpha X_1 + \beta X_2$. La valeur en 0 donne $\sqrt{\pi} = i\alpha - i\beta$ et $0 = \alpha + \beta$. On en déduit que $\alpha = \beta = -i\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Il suffit alors de former $\alpha X_1 + \beta X_2$ pour obtenir

$$u(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+t^2)^{1/4}} \cos\left(\frac{\arctan(t)}{2}\right) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+t^2)^{1/4}} \sin\left(\frac{\arctan(t)}{2}\right)$$