

CCP2017 - MP1

Un corrigé

Problème : séries trigonométriques

Partie 1 : exemples

1. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur \mathbb{R} .

Pour le calcul, on remarque que pour $p \geq 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p - e^{ix}}$$

En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p \cos(x)}{p^2 - 2p \cos(x) + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{p^n} = \frac{p \sin(x)}{p^2 - 2p \cos(x) + 1}$$

Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right) = \frac{4 - 2 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} + \frac{3 \sin(x)}{10 - 6 \cos(x)}$$

2. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$$

Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x)) \exp(i \sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$$

3. Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $f_n(x) = a_n \cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $f_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum (f_n)$ n'est donc pas simplement convergente sur \mathbb{R} .

4. La norme infinie sur \mathbb{R} de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur \mathbb{R} .

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur \mathbb{R} .

Une condition nécessaire

6. On a $(\cdot|\cdot)$ étant le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^2 , via Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |a \cos(x) + b \sin(x)| = |((a, b)|(\cos(x), \sin(x)))| \leq \|(a, b)\| \cdot \|(\cos(x), \sin(x))\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De plus, il y a un cas d'égalité :

- c'est immédiat si $a = b = 0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x), \sin(x))$.

7. Avec $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. On suppose ici que $\sum(\|f_n\|_\infty)$ converge. On a (avec la question précédente et car nx varie dans \mathbb{R} quand c'est le cas pour x si $n > 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \begin{cases} |a_n| \\ |b_n| \end{cases}$$

Par comparaison des séries positives, $\sum(a_n)$ et $\sum(b_n)$ convergent absolument.

Autres propriétés

8. La convergence normale sur \mathbb{R} entraîne la convergence uniforme sur \mathbb{R} et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la série étant continues sur \mathbb{R} , il en est de même de f .

La convergence normale sur \mathbb{R} entraîne la convergence simple sur \mathbb{R} . La convergence simple conserve la 2π -périodicité (si $S_n(x + 2\pi) = S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π -périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π -périodique et

$$f \in C_{2\pi}$$

9. On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$. On a donc

$$\forall n \geq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \left[\frac{1}{4n} \sin(2nx) + \frac{x}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

De même, $\sin(kx) \cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(kx + nx) + \sin(kx - nx))$. $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$ (évident si $p = 0$, par primitivation en $-\frac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que

$$\forall n, k, \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx = 0$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) \cos(nx) + b_k \sin(kx) \cos(nx)) dx$$

Avec $f_k(x) = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. On a $\forall x, |f_k(x) \cos(nx)| \leq |f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions normalement convergente sur le SEGMENT $[-\pi, \pi]$ et on est dans le cas simple où on peut intervertir :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx \right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n \pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi,

$$\forall n \neq 0, a_n = \alpha_n(f) \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{1}{2} \alpha_0(f)$$

11. Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \text{ et } \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

12. $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g - f) = \beta_n(g - f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.
13. Si f est paire, $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,

$$\forall n, \beta_n(f) = 0$$

$x \mapsto f(x) \cos(nx)$ est paire et

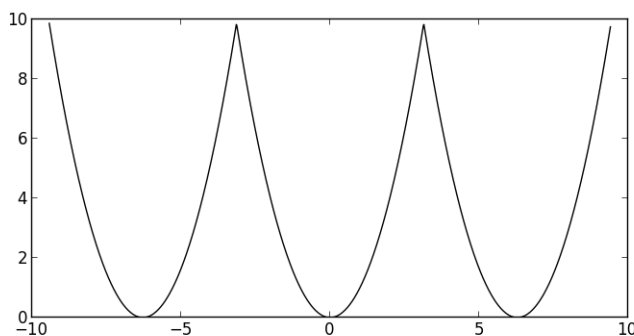
$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$$

14. Utilisons un petit script Python. Pour calculer $f(x)$, on cherche un entier k tel que $x - 2k\pi = y \in [-\pi, \pi]$ et on renvoie y^2 .

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt
```

```
def f(x):
    k=floor((x+pi)/(2*pi))
    return (x-2*k*pi)**2
```

```
a,b=-3*pi,3*pi
pas=(b-a)/1000
lx=[a+k*pas for k in range(1000)]
ly=[f(x) for x in lx]
plt.plot(lx,ly,'k')
plt.axis('scaled')
plt.show()
```



La fonction f étant paire, les coefficients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = -\frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = -\frac{2}{n} \left(\left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx \right)$$

et ainsi

$$\forall n \neq 0, \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

On a aussi

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Comme $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

la série étant normalement convergente sur \mathbb{R} .

15. Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$