CCP2017 - MP1
Un corrigé

Problème : séries trigonométriques

Partie 1 : exemples

1. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p \geq 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}$$
En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2-2p\cos(x)+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$$
Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$

2. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$$
Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}$$

3. Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $f_n(x) = a_n\cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $f_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum(f_n)$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

4. La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. On a ($(.|.)$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$), via Cauchy-Schwarz,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |a\cos(x)+b\sin(x)|=|((a,b)|(\cos(x),\sin(x)))|\leq\|(a,b)\|\cdot\|(\cos(x),\sin(x))\|=\sqrt{a^2+b^2}$$

De plus, il y a un cas d'égalité :
- c'est immédiat si $a=b=0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a,b)\neq(0,0)$, $(a/\sqrt{a^2+b^2},b/\sqrt{a^2+b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x),\sin(x))$.

7. Avec $f_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$. On suppose ici que $\sum(\|f_n\|_\infty)$ converge. On a (avec la question précédente et car nx varie dans $\mathbb{R}$ quand c'est le cas pour x si $n>0$)

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_\infty=\sqrt{a_n^2+b^2}\geq\left\{\begin{array}{l}|a_n|\\|b_n|\end{array}\right.$$

Par comparaison des séries positives, $\sum(a_n)$ et $\sum(b_n)$ convergent absolument.

Autres propriétés

8. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la séries étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f.
La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La convergence simple conserva la 2π-périodicité (si $S_n(x+2\pi)=S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π-périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π-périodique et

$$f\in C_{2\pi}$$

9. On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx)=\frac{1}{2}(\cos(2nx)+1)$. On a donc

$$\forall n\geq 1,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\ dx=\left[\frac{1}{4n}\sin(2nx)+\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

De même, $\sin(kx)\cos(nx)=\frac{1}{2}(\sin(kx+nx)+\sin(kx-nx))$. $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi,\pi]$ (évident si $p=0$, par primitivation en $-\frac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que

$$\forall n,k,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\ dx=0$$

10. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx)\cos(nx)+b_k\sin(kx)\cos(nx))\ dx$$

Avec $f_k(x)=a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$. On a $\forall x,\ |f_k(x)\cos(nx)|\leq|f_k(x)|\leq\|f_k\|_\infty$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions normalement convergente sur le SEGMENT $[-\pi,\pi]$ et on est dans le cas simple où on peut intervertir :

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\ dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\ dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx))\ dx\right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k=n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n\neq0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n=0$. Ainsi,

$$\forall n\neq0,\ a_n=\alpha_n(f)\ \text{ et }\ a_0=\frac{1}{2}\alpha_0(f)$$