Compléments sur les v.a. : corrigé

Exercice 1 : On considère 3 boîtes de capacité illimitée et une infinité de jetons que l'on range successivement et au hasard dans l'une des boîtes. Soit X le nombre de jetons placés lorsque pour la première fois il n'y a plus qu'une boîte vide, et Y le nombre de jetons placés lorsque pour la première fois il n'y a plus de boîte vide. Déterminer la loi de X, la loi conjointe de (X, Y) et la loi de Y.

X correspond au rang du jeton qui, pour la première fois, n'est pas rangé dans la même boîte que les précédents. X prend donc toutes les valeurs entières supérieures ou égales à 2 et, pour $n \geqslant 2$, l'événement $(X = n)$ signifie que les $n-1$ premiers jetons ont été placés dans la même boîte et le n-ième dans l'une des deux autres boîtes.
Pour chaque jeton, le choix de la boîte est fait au hasard parmi les 3 et les rangements successifs sont indépendants.
On a donc : $P(X = n) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\dfrac{2}{3}$.

$$\forall n \geqslant 2,\ P(X = n) = \frac{2}{3^{n-1}}.$$

Le couple (X, Y) prend toutes les valeurs (n, k) dans $\mathbb{N}^2$ avec $k > n \geqslant 2$.
Pour un tel couple, l'événement $\{(X, Y) = (n, k)\}$ signifie que les $n-1$ premiers jetons ont été rangés dans la même boîte, le n-ième dans une autre boîte, les $k-1-n$ suivants (éventuellement $k-n-1 = 0$) dans l'une des deux premières boîtes et le k-ième dans la dernière boîte. On a donc : $P((X, Y) = (n, k)) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1-n}\dfrac{1}{3}$.

$$\forall (n, k) \in (X, Y)(\Omega),\ P((X, Y) = (n, k)) = \frac{2^{k-n}}{3^{k-1}}.$$

$Y(\Omega)$ est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3.
$\forall k \geqslant 3,\ P(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} P((X, Y) = (n, k)) = \sum_{n=2}^{k-1} P((X, Y) = (n, k))$, car si $n \geqslant k$ la probabilité est nulle.
La formule précédente donne : $P(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=2}^{k-1}\frac{2^{k-n}}{3^{k-1}} = \frac{1}{3^{k-1}}\sum_{q=1}^{k-2} 2^q = \frac{2}{3^{k-1}}\left(2^{k-2} - 1\right)$.

$$\forall k \geqslant 3,\ P(Y = k) = \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}}.$$

Exercice 2 : Soient X et Y deux v.a. définies sur un même espace probabilisé. Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $y \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(y, p)$, où $p \in]0, 1[$ est fixé.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Soit $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z. X et Z sont-elles indépendantes ? Y et Z sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la covariance de Y et Z et leur coefficient de corrélation.

---

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Lorsque Y prend une valeur y fixée dans $\mathbb{N}$, X peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et y. X peut donc prendre aussi toutes les valeurs entières : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

On connaît la loi de Y : $\forall y \in \mathbb{N}, P(Y=y) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^y}{y!}$.
De plus, pour tout couple (x,y) dans $\mathbb{N}^2$, on connaît la probabilité conditionnelle de l'événement $X=x$ sachant que $Y=y$. Elle est nulle si $x>y$ et sinon elle vaut $\dbinom{y}{x}p^x(1-p)^{y-x}$.

On peut alors calculer la loi de X. Soit $x \in \mathbb{N}$.
$P(X=x) = \displaystyle\sum_{y=0}^{\infty} P((X,Y)=(x,y)) = \sum_{y=x}^{\infty} P((X,Y)=(x,y)) = \sum_{y=x}^{\infty} P_{Y=y}(X=x)P(Y=y)$.
$P(X=x) = \displaystyle\sum_{y=x}^{\infty} \binom{y}{x} p^x\,(1-p)^{y-x}\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda}\frac{1}{x!}p^x\,\sum_{y=x}^{\infty}\frac{1}{(y-x)!}\,(1-p)^{y-x}\,\lambda^y$.

$P(X=x) = e^{-\lambda}\dfrac{1}{x!}p^x\;\lambda^x\;\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\,(1-p)^q\,\lambda^q = e^{-\lambda}\frac{1}{x!}p^x\;\lambda^x\;e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{1}{x!}\,(\lambda p)^x$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}\,(\lambda p)\,.$$

C'est exactement le même calcul qu'à l'exercice précédent (étude du nombre de clients en caisse n^o 1), et c'est un calcul très classique.

On en déduit : $E(X) = V(X) = \lambda p$.

2. Z prend toutes les valeurs entières négatives (si $Y=y$, X ne prend que des valeurs inférieures à y donc on a toujours : $X \leqslant Y$).

Soit $z=-n \in \mathbb{Z}$. $P(Z=z) = P(X=Y-n)$. On applique la formule des probabilités totales à partir du système complet d'événements $(Y=y), y\in\mathbb{N}$.
$P(Z=-n) = \displaystyle\sum_{y=0}^{\infty} P((X=Y-n)\cap(Y=y)) = \sum_{y=0}^{\infty} P((X=y-n)\cap(Y=y))$.
$P(Z=-n) = \displaystyle\sum_{y=n}^{\infty} P((X=y-n)\cap(Y=y)) = \sum_{y=n}^{\infty} P_{Y=y}(X=y-n)P(Y=y)$.
$P(Z=-n) = \displaystyle\sum_{y=n}^{\infty}\binom{y}{y-n}p^{y-n}(1-p)^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = \frac{1}{n!}(1-p)^n e^{-\lambda}\lambda^n\sum_{y=n}^{\infty}\frac{1}{(y-n)!}p^{y-n}\lambda^{y-n}$.
On obtient finalement :
$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Z=-n) = \frac{1}{n!}\,(\lambda(1-p))^n\,e^{-\lambda(1-p)}.$$
La v.a. $-Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

Indépendance de X et Z : soit x et n dans $\mathbb{N}$.
$P(X=x)P(Z=-n) = e^{-\lambda p}\dfrac{1}{x!}\,(\lambda p)^x\,\dfrac{1}{n!}\,(\lambda(1-p))^n\,e^{-\lambda(1-p)}$.

$P((X=x)\cap(Z=-n)) = P((X=x)\cap(X-Y=-n)) = P((X=x)\cap(Y=x+n))$.
$P((X=x)\cap(Z=-n)) = P_{Y=x+n}(X=x)P(Y=x+n) = \dbinom{x+n}{x}p^x(1-p)^n e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{x+n}}{(x+n)!}$.
$P((X=x)\cap(Z=-n)) = \dfrac{1}{x!\;n!}(\lambda p)^x(\lambda(1-p))^n e^{-\lambda} = P(X=x)P(Z=-n)$.

On peut conclure que les v.a. X et Z sont indépendantes.

Indépendance de Y et Z : on a toujours $Z \geqslant -Y$. On peut donc trouver un contre-exemple à l'indépendance :
$P((Y=0)\cap(Z=-1)) = 0 \neq P(Y=0)P(Z=-1)$.

On conclut donc que Y et Z ne sont pas indépendantes.

3. $Y + Z = X$. On a donc : $V(X) = V(Y + Z) = V(Y) + V(Z) + 2\,\mathrm{cov}(Y, Z)$.
Or on sait que la variance d'une loi de Poisson de paramètre μ est égale à μ. Ici, les 3 v.a. X, Y et $-Z$ suivent des lois de Poisson et, de plus : $V(-Z) = V(Z)$.

On obtient : $\mathrm{cov}(Y, Z) = -\lambda(1 - p)$ et $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{cov}(Y, Z)}{\sigma(Y)\sigma(Z)} = -\sqrt{1 - p}$.