Exercice 1 : Radar d'avion

Q.1.

$$u_m(t) = e(t) + R.i(t) = k_e.\omega_m(t) + R.\frac{C_m(t)}{k_m} = k_e.\omega_m(t) + R.\frac{J}{k_m}.\frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

On a donc l'équation différentielle suivante :

$$\frac{R.J}{k_m}.\frac{d\omega_m(t)}{dt} + k_e.\omega_m(t) = u_m(t)$$

Q.2. Avec la transformée de Laplace, on obtient :

$$\frac{R.J}{k_m}.p.\Omega_m(p) + k_e.\Omega_m(p) = U_m(p) \Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{k_e + \frac{R.J}{k_m}.p}$$

Q.3.

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{k_e + \frac{R.J}{k_m}.p} = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + \frac{J.R}{k_m.k_e}p}$$

$$K_m = \frac{1}{k_e} \qquad et \qquad \tau_m = \frac{J.R}{k_m.k_e}$$

Q.4. Fonction de transfert d'ordre 1, les a_i sont de mêmes signes donc $H_m(p)$ est stable sans dépassement. Le pôle de cette fonction de transfert vaut $-1/\tau_m$

Q.5.

$$\omega_m(\infty) = \lim_{t\to+\infty} \omega_m(t) = \lim_{p\to0^+} p.\Omega_m(p) = \lim_{p\to0^+} p.H_m(p).\frac{U_0}{p} = \lim_{p\to0^+} H_m(p).U_0 = K_m.U_0$$

$$e_r(\infty) = (1 - K_m)U_0$$

Q.6.

$$H(p) = \frac{A.H_m(p).B}{p + A.H_m(p).B} = \frac{A.\frac{K_m}{1+\tau_m.p}.B}{p + A.\frac{K_m}{1+\tau_m.p}.B} = \frac{A.K_m.B}{p(1+\tau_m.p) + A.K_m.B} = \frac{A.K_m.B}{p + \tau_m.p^2 + A.K_m.B}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{A.K_m.B}p + \frac{\tau_m}{A.K_m.B}p^2}$$

Q.7.

$$K = 1 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{A.K_m.B}{\tau_m}} \qquad z = \frac{\omega_0}{2}.\frac{1}{A.K_m.B} = \frac{1}{2}.\frac{1}{A.K_m.B}\sqrt{\frac{A.K_m.B}{\tau_m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{A.K_m.B.\tau_m}}$$

Q.8. On observe une réponse stable avec dépassement donc les pôles ont une partie réelle négative ainsi qu'une partie imaginaire non nulle.

Q.9.

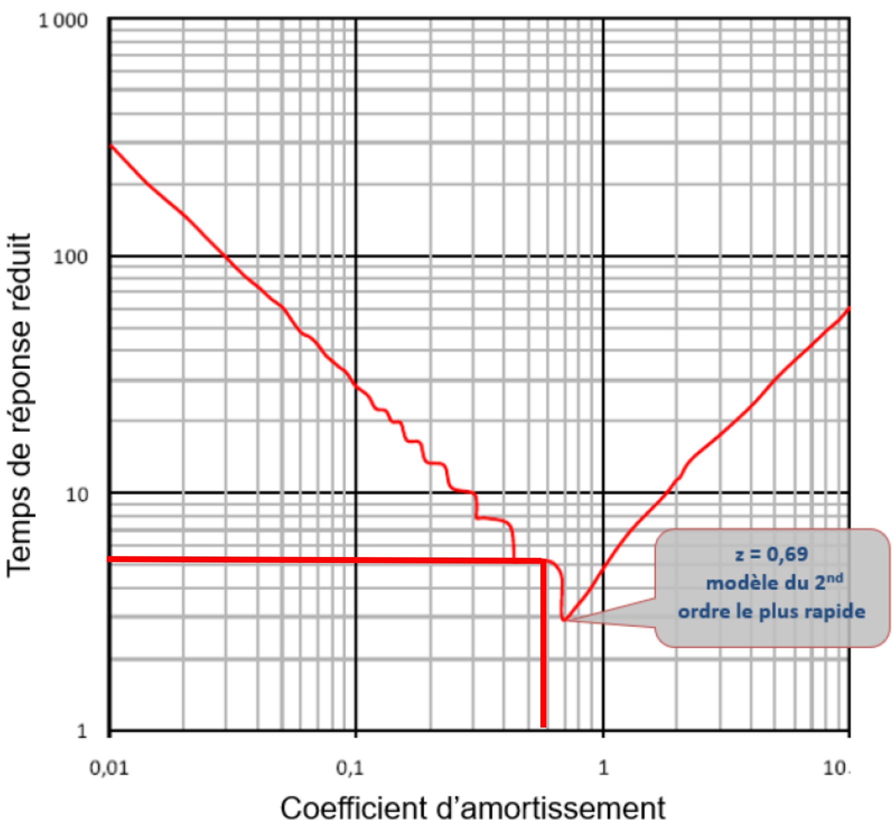
$$K = \frac{\Delta\theta_r(\infty)}{\Delta\theta_c(\infty)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{On relève } D_{1\%} = \frac{1{,}1 - 1}{1} = 10\% \ \rightarrow \ z = \sqrt{\frac{(\ln D_{1\%})^2}{\pi^2 + (\ln D_{1\%})^2}} = \sqrt{\frac{(\ln 0{,}1)^2}{\pi^2 + (\ln 0{,}1)^2}} = 0{,}58$$

$$\text{On relève à l'instantdu 1er dépassement : } \frac{T_a}{2} = 0{,}25\ s \rightarrow T_a = 0{,}5\ s$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_a\sqrt{1 - z^2}} = \frac{2\pi}{0{,}5\sqrt{1 - 0{,}58^2}} = 15{,}8\ rad/s$$

Q.10. On relève $t_{r5\%}.\omega_0 = 5{,}1 \rightarrow t_{r5\%} = \frac{5{,}1}{15{,}8} = 0{,}32s$



La bande de 5% autour de la valeur finale de $\theta_r(\infty)$ vaut [0,95 ; 1,05]. $\theta_r(t)$ rentre dans cette bande de façon définitive après le premier dépassement soit environ à 0,33 s ce qui correspond au résultat trouvé à l'aide de l'abaque.

Q.11. $e_{r\%}(\infty) = (1 - K) = 0\%$ ce qui est bien inférieur au 2% demandés par le cahier des charges.

Le temps de réponse obtenu est supérieur à celui du cahier des charges (0,32>0,2) donc le cahier des charges n'est pas respecté sur ce point.

Exercice 2 : Etude d'une antenne parabolique

Q.1.

$$U_m(p) = E_m(p) + (R_m + p.L_m).I(P) \qquad E_m(p) = K_e.\Omega_m(p)$$

$$J_m.p.\Omega_m(p) = C_m(p) \qquad C_m(p) = K_c.I_m(p)$$

Q.2.

$$U_m(p) = E_m(p) + (R_m + p.L_m).I(P) = K_e.\Omega_m(p) + \frac{(R_m + p.L_m)C_m(p)}{K_c}$$

$$\Leftrightarrow U_m(p) = \Omega_m(p)\left(K_e + \frac{(R_m + p.L_m).J_m.p}{K_c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{K_e + \frac{R_m.J_m}{K_c}.p + \frac{L_m.J_m}{K_c}.p^2} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R_m.J_m}{K_c.K_e}p + \frac{L_m.J_m}{K_c.K_e}p^2}$$

Q.3.

$$K = \frac{1}{K_e} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_c.K_e}{L_m.J_m}} \qquad z = \frac{\omega_0}{2}.\frac{R_m.J_m}{K_c.K_e} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_c.K_e}{L_m.J_m}}.\frac{R_m.J_m}{K_c.K_e} = \frac{1}{2}R_m\sqrt{\frac{J_m}{K_c.K_e.L_m}}$$

Q.4.

$$(1 + \tau_e.p).(1 + \tau_m.p) = 1 + (\tau_e + \tau_m)p + \tau_e.\tau_m.p^2 \approx 1 + \tau_m.p + \tau_e.\tau_m.p^2 \qquad \text{car} \quad \tau_e \ll \tau_m$$

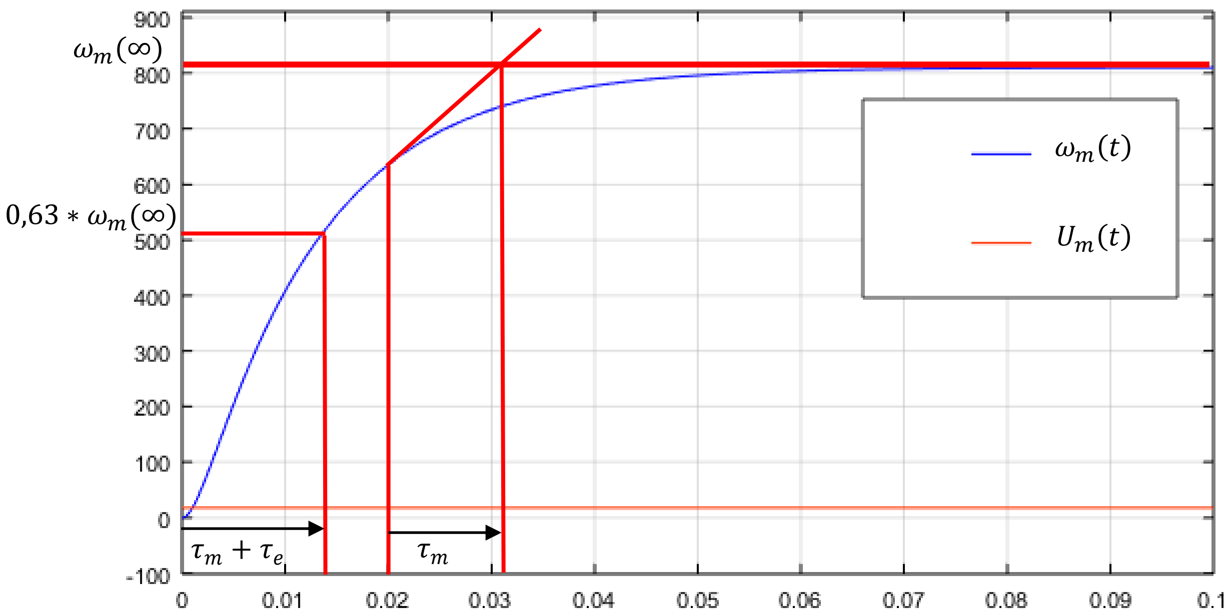
$$= 1 + \frac{R_m.J_m}{K_e.K_c}p + \frac{L_m}{R_m}.\frac{R_m.J_m}{K_e.K_c}p^2 = 1 + \frac{R_m.J_m}{K_e.K_c}p + \frac{L_m.J_m}{K_c.K_e}p^2$$

On retrouve bien le même dénominateur que celui de la fonction de transfert $H(p)$.

Q.5. $u_m(t) = U_0$ quand t>0 et de $U_m(p) = U_0/p$.

Q.6. On sait que $\Delta u_m(\infty) = 18\ V$, on relève que $\Delta\omega_m(\infty) = 810\ rad/s$ donc

$$K = \frac{\Delta\omega_m(\infty)}{\Delta u_m(\infty)} = \frac{810}{18} = 45\frac{rad}{s.V}$$



Grâce à l'intersection entre la tangente de $\omega_m(t)$ et $\omega_m(\infty)$ on relève $\tau_m = 0{,}012\ s$

Vu que $\Delta\omega_m(\infty) = 810\ rad/s$ alors 0,63*$\Delta\omega_m(\infty) = 510\ rad/s$

L'instant où l'on atteint 0,63*$\omega_m(\infty)$ correspond à $\tau_m + \tau_e = 0{,}013\ s$ donc

$\tau_e = 0{,}013 - \tau_m = 0{,}013 - 0{,}012 = 0{,}001\ s$

On a alors la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{45}{(1 + 0{,}001.p).(1 + 0{,}013.p)}$$

Q.7. $H(p)$ est une fonction de transfert du second ordre donc la tangente à l'origine est horizontale

Q.8. En ne considérant que le pôle dominant (donc la plus grande constante de temps), on a alors :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau_m.p}$$

Q.9. $H(p)$ correspond à la fonction de transfert associé à l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$\tau_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K.U_0$$

On a alors :

$$\omega_m(t) = K.U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right)$$

Q.10.

$$\omega_m(\infty) = \Delta\omega_m(\infty) = K.\Delta u_m(\infty) = K.U_0 = 45 * 18 = 810\ rad/s$$

$$N_{m\,max} = \frac{60.\omega_m(\infty)}{2\pi} = \frac{60.810}{2\pi} = 7735\ tr/min < 8000\ tr/min$$

Q.11.

$$K_T = 1 \qquad \omega_{0T} = \sqrt{\frac{K_a.K}{\tau_m.N}} \qquad z = \frac{\omega_0}{2}.\frac{N}{K_a.K} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_a.K}{\tau_m.N}}.\frac{N}{K_a.K} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{K_a.K.\tau_m}}$$

Q.12. Pour une fonction d'ordre 2 soumise à un échelon, on sait que $e_{r\%}(\infty) = |1 - K_T| = 0\%$. Il n'y a alors pas d'erreur statique donc on respect bien le cahier des charges.

Q.13. Pour minimiser le temps de réponse, il faut imposer une valeur de K_a permettant d'avoir un coefficient d'amortissement $z_T = 0{,}69$ (voir abaque). On a alors :

$$0{,}69 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{K_a.K.\tau_m}} \leftrightarrow 4.0{,}69^2 = \frac{N}{K_a.K.\tau_m}$$

$$\leftrightarrow K_a = \frac{N}{4.0{,}69^2.K.\tau_m} = \frac{23328}{4 * 0{,}69^2 * 45 * 0{,}012} = 22040\ V/rad$$