

Analyse asymptotique

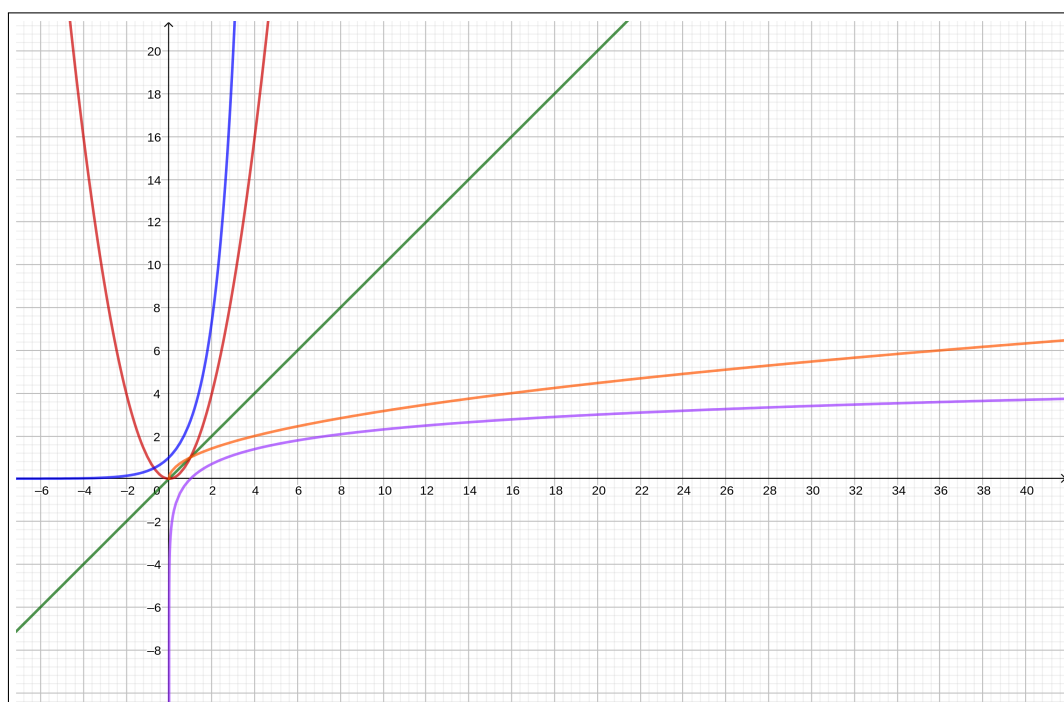
Introduction

Nous avons donné un sens précis aux limites, pour les suites et pour les fonctions. Ainsi, dire qu'une suite u tend vers $+\infty$ signifie :

Que dire de deux suites (ou deux fonctions) qui ont la même limite ? Tendent-elles vers cette limite commune « de façon analogue » ? Ou bien peut-on comparer leur comportement asymptotique ?

La réponse est oui, c'est ce que nous allons développer dans un premier temps.

Dans un second temps, nous allons comparer les comportements asymptotiques des suites et fonctions à ceux d'une famille de référence : les polynômes. Cela sera fait grâce à un nouvel outil : le développement limité.



$\exp$, $\ln$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x$: toutes ces fonctions ont la même limite en $+\infty$.

1 Relations de comparaisons asymptotiques : cas des suites

Remarque : pour une suite de réels, le seul comportement asymptotique à étudier est pour $n \rightarrow +\infty$; de ce point de vue, les suites sont plus simples que les fonctions.

Comparer le comportement asymptotique de deux suites c'est les comparer pour « $n \rightarrow +\infty$ » et donc pas sur leurs *premiers termes*.

1.1 Domination, négligeabilité

Définition

Soient u et v deux suites, avec v qui ne s'annule jamais à partir d'un certain rang.

- On dit que u est **dominée** par v lorsque $\frac{u}{v}$ est bornée (à partir d'un certain rang), autrement dit :

On note alors $u_n = O(v_n)$ (et on dit "grand O").

- ii. On dit que u est **négligeable** devant v lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$ (on dit "petit o"), ou bien $u_n \ll v_n$.

Exemples :

a) Prouver que $(3n^4 - n^2 + 2n + 1)_{n \in \mathbb{N}} = O(n^4)$.

b) Prouver que $(n^2 - 4n)_{n \in \mathbb{N}} = o(n^5)$.

Remarque : on a déjà utilisé la domination, lors de

Les deux propositions qui suivent sont des conséquences directes des définitions et des opérations sur les limites.

Proposition

(Lien entre négligeabilité et domination)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites.

- i. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
- ii. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- iii. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- iv. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- v. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.

Exemple : $\sin n = o(n)$ et $n = o(n^2)$ donc $\sin n = o(n^2)$

Proposition

(Négligeabilité et domination : comportement lorsqu'on fait des opérations)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.
- ii. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
- iii. On peut remplacer tous les o par des O dans les propositions précédentes.

Remarque : la formulation a été privilégiée avec la négligeabilité qui est plus utilisée que la domination.

Proposition

Les comparaisons des fonctions usuelles donnent les relations suivantes :

- i. $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln^\beta n = o(n^\alpha)$
- ii. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall a > 1, n^\alpha = o(a^n)$
- iii. $\forall a \in \mathbb{R}, a^n = o(n!)$.

Démonstration

— Commençons par prouver que $\ln n = o(n)$:

On a, $\forall n \geq 1$, $\ln n = \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^n = 2(\sqrt{n} - 1) \leq 2\sqrt{n}$.

Il suit que $\forall n \geq 1$, $0 \leq \frac{\ln n}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ soit $\ln n = o(n)$.

— Montrons à présent que $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$.

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\forall n \geq 1$, $\frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha} \ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\frac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$.

Or, en vertu du point précédent et par composition, $\frac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a donc bien prouvé i. $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$.

— Prouvons ii. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $a > 1$.

On a, pour $n \geq 1$, $\frac{n^\alpha}{a^n} = \frac{e^{\alpha \ln n}}{e^{n \ln a}} = \exp(\alpha \ln n - n \ln a) = \exp\left(n\left(\alpha \frac{\ln n}{n} - \ln a\right)\right)$.

On a $a > 1$ donc $\ln a > 0$ puis $n\left(\alpha \frac{\ln n}{n} - \ln a\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

En composant avec $\exp$ on obtient bien que $n^\alpha = o(a^n)$.

— Prouvons iii. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^n = o(n!)$.

Pour $a = 0$, le résultat est évident. Ensuite, on observe que, $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $a^n = O(|a|^n)$ et donc il suffit de montrer iii. pour $a > 0$.

Soit $n_0 = \lfloor a \rfloor$. On a, pour $n \geq n_0$: $\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \times \underbrace{\frac{a}{n_0+1} \times \dots \times \frac{a}{n}}_{n-n_0 \text{ facteurs}} \leq \frac{a^{n_0}}{n_0!} \times \left(\frac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0}$.

Or, $0 < \frac{a}{n_0+1} < 1$ donc $\left(\frac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on a bien $a^n = o(n!)$.

Remarques :

- dans ii. et iii. on peut prendre $a = e$ et on obtient e^n .
- il faut se souvenir que :

logarithmes	$\ll$	polynômes	$\ll$	exponentielles	$\ll$	factorielle
-------------	-------	-----------	-------	----------------	-------	-------------

1.2 Equivalence

Définition

Soit u et v deux suites avec v qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

On dit que u est **équivalent** à v lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; on note alors $u_n \sim v_n$.

Remarque : la proposition qui suit justifie le vocabulaire employé.

Proposition

La relation $\sim$ entre deux suites (qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang) est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est :

-
-
-

Exemples : $n^2 + 3n + 1 \sim$ et $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ car

Proposition

(Lien entre équivalents et limites)

Soit u et v deux suites telles que $u_n \sim v_n$.

- Si u n'a pas de limite alors
- Si u admet une limite alors

Remarque : si u et v ont la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ a-t-on $u_n \sim v_n$?

Proposition

Soit u et v deux suites. On a équivalence entre les relations $u_n \sim v_n$ et $u_n = v_n + o(v_n)$.

Démonstration

$$u_n \sim v_n \iff \lim_n \frac{u_n}{v_n} = 1 \iff \lim_n \frac{u_n - v_n}{v_n} = 0 \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff u_n = v_n + o(v_n)$$

Remarque :

- a) la proposition précédente est fondamentale, elle annonce que l'équivalence est « l'égalité à un petit o près » ; cela sera central dans l'étude des développements limités.
- b) Lorsqu'on travaille avec une somme, on veillera à conserver uniquement le terme significatif. Par exemple, on a $e^n + n^2 + 1 \sim e^n + n^2 \sim e^n + 1$ mais la seule équivalence vraiment pertinente ici est $e^n + n^2 + 1 \sim$

Théorème

L'équivalence est compatible avec le produit, le quotient, les puissances.

Autrement dit, si u, v et w sont des suites telles que $u_n \sim v_n$ alors :

$$u_n \times w_n \sim v_n \times w_n \quad ; \quad \frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{w_n} \quad ; \quad \frac{w_n}{u_n} \sim \frac{w_n}{v_n} \quad ; \quad u_n^\alpha \sim v_n^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Remarques :

- a) pour alléger l'énoncé du théorème précédent, on a omis de demander que les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang pour assurer l'existence des quotients.

b) Ces propriétés se démontrent simplement en revenant aux définitions, par exemple :

Méthode

Pour déterminer une limite en utilisant des équivalents :

1. on travaille par produit, quotient, puissances sur les équivalents pour simplifier l'expression à étudier ;
2. les « petits o » disparaissent ;
3. lorsque l'expression a une limite simple à déterminer, on s'arrête.

Exemples :

a) $\frac{3n^2 + \cos n}{(5n - 1)^2} \sim \frac{3n^2}{(5n)^2} \sim \frac{3n^2}{25n^2} \sim \frac{3}{25}$ donc $\frac{3n^2 + \cos n}{(5n - 1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{25}$.

b) $n \sin^2 \frac{1}{n} \sim n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sim n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$; on en déduit $n \sin^2 \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque : on voit bien, avec ce dernier exemple, que la notion d'équivalent est plus forte que celle de limite : on a plus d'information en sachant $n \sin^2 \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ qu'en sachant $n \sin^2 \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

ATTENTION : avec les équivalents, il faut se méfier des sommes et des différences.

Exemple : $e^n + n^2 \sim e^n + n^2$ et $e^n + n^2 \sim e^n$ la différence donnerait $0 \sim n^2$!

2 Relations de comparaisons : cas des fonctions

Nous allons adapter aux fonctions ce qui a été vu pour les suites. La différence notable est qu'on va travailler pour des limites en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dans le cas de deux suites, une comparaison asymptotique se passe nécessairement pour $n \rightarrow +\infty$ (on peut écrire $u_n = o(v_n)$ sans préciser « pour $n \rightarrow +\infty$ ») ; pour les fonctions, il faudra systématiquement indiquer dans quel voisinage on travaille.

Tous les résultats vus pour les suites demeurent vrais dans le cas des fonctions ; on se limitera dans ce paragraphe à donner ceux qui sont les plus utiles.

Dans la suite, a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Sauf mention contraire, les fonctions considérées seront définies au voisinage de a (sauf, peut-être, en a), et ne s'annuleront pas au voisinage de a (sauf, peut-être, en a). V_a désignera un voisinage de a (peut-être privé de a).

Définition

Soit f, g deux fonctions. On dit que :

- g domine f en a lorsqu'il existe un voisinage de a sur lequel $\frac{f}{g}$ est bornée.
On note alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
- f est négligeable devant g en a lorsque
- f est équivalente à g en a lorsque

Exemple : soit deux entiers naturels $n < p$. Compléter les puissances de x avec n et p :

$$x \underset{0}{=} o(x) \quad \text{et} \quad x \underset{+\infty}{=} o(x)$$

En effet,

Définition

(définition alternative de la négligeabilité)

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon(x)$ définie sur un voisinage V_a de a telle qu'on ait :

- $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$;
- $\forall x \in V_a, f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Remarques :

- On avait déjà introduit ce type de notation
- Sur le même modèle de faire apparaitre une nouvelle fonction, on pourrait formuler des définitions alternatives pour la domination et la négligeabilité.

Proposition

(Lien entre les relations)

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ alors
- $f \underset{a}{\sim} g$ si, et seulement si, $f - g \underset{a}{=} o(g)$

Proposition

(Opérations avec les relations)

Soit des fonctions f, g, h, k ; deux réels λ et μ .

- Domination et la négligeabilité (on écrit uniquement pour o) :
 - Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $\lambda f + \mu g \underset{a}{=} \quad$.
 - Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(k)$ alors $fg \underset{a}{=} \quad$.
- Équivalence :
 - L'équivalence n'est pas compatible avec la somme (en général).
 - Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$ alors $fg \underset{a}{\sim} \quad$.
 - Si $f \underset{a}{\sim} h$ alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \quad$

Remarque : Pour les équivalences, iii. et ii. permettent de déduire que

Par ailleurs, en raisonnant par récurrence avec ii. on obtient :

Proposition

(Substitution dans les équivalents)

Soit f, g telles que $f \sim_a g$ et φ est une fonction définie au voisinage de $b \in \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a$.

On a :

Démonstration

C'est une conséquence de la composition des limites :

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f \circ \varphi}{g \circ \varphi}(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f}{g}(\varphi(x)) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f}{g}(t) = 1.$$

■

Remarque : on a volontairement omis le mot *composition* de l'énoncé (qui a été remplacé par *substitution*) car on ne peut composer les équivalents qu'à droite.

Méthode

À mémoriser : les équivalents sont compatibles avec le produit, le quotient, la substitution ; il est interdit d'additionner et soustraire des équivalents ; on ne compose pas les équivalents (en général).

Théorème

(Equivalents classiques)

1. Polynômes : soit P est un polynôme de degré n , $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-r} x^{n-r}$.

$$P(x) \underset{0}{\sim} \quad ; \quad P(x) \underset{+\infty}{\sim} \quad ; \quad P(x) \underset{-\infty}{\sim}$$

2. Fonctions trigonométriques : $\sin x \underset{0}{\sim}$ et $\cos x \underset{0}{\sim}$

3. Exponentielle et logarithme : $e^x - 1 \underset{0}{\sim}$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$

3 Développements limités

Dans tout ce chapitre, a désigne un réel et f une fonction définie sur voisinage de a (on verra sur des exemples que f peut être définie sur un voisinage de a privé de a). L'objet des développements limités est d'approcher la fonction f par un polynôme au voisinage de a . En particulier, les développements limités vont donc nous fournir des équivalents polynomiaux.

3.1 Généralités

3.1.1 Définition, premiers développements limités

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie au voisinage du réel a .

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en a** s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, sur un voisinage de a , on ait :

$$f(x) = f(a+h) = P(h) + R(h) \quad \text{avec } R(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h^n)$$

Le polynôme $P(h) = b_0 + b_1 h + \dots + b_n h^n$ est appelé **partie régulière** du développement limité.

Remarques :

- on note $DL_n(a)$ pour "développement limité d'ordre n en a ".
- La notion de négligeabilité est une notion locale : il faudra systématiquement préciser de quel voisinage il s'agit (souvent $h \rightarrow 0$).
- Le changement de variable $x = a + h$ n'est pas obligatoire mais il facilite la lisibilité. Tous les énoncés peuvent se reformuler avec x , c'est-à-dire en remplaçant les h par $x - a$.

Exemples :

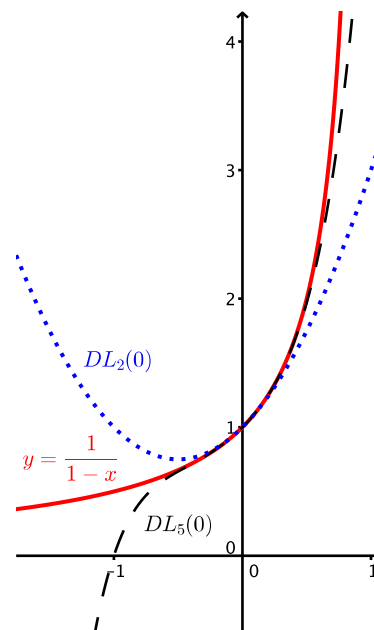
a) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ au voisinage de $a = 1$

Remarque : cet exemple est un peu idiot ! En effet, pour approcher un polynôme f par un polynôme P il suffit de prendre $P = f$! Néanmoins, on peut remarquer que si l'on veut un développement limité à un ordre inférieur, il suffit de **tronquer** le développement limité, ce qui est une règle générale (que l'on verra un peu plus loin).

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ au voisinage de $a = 0$

— A l'ordre 2 : prouver que $f(h) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + h + h^2 + o(h^2)$

— A l'ordre n :



Remarque : si la partie régulière du DL a ses coefficients d'ordres les plus faibles nuls, c'est-à-dire si elle est de la forme $P(h) = b_k h^k + b_{k+1} h^{k+1} + \dots + b_n h^n$, alors on l'écrit sous la forme dite **normalisée** :

$$P(h) = h^k (b_k + b_{k+1} h + \dots + b_n h^{n-k})$$

3.1.2 Plusieurs développements limités d'ordres différents : quel intérêt ?

Travaillons sur un exemple : on a vu $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

Quelle différence entre ces deux développements limités ? Lequel est le *meilleur* ?

Les $o(x^n)$ correspondent à l'erreur commise. Par analogie avec l'approximation décimale, c'est comme si on disait $\pi \simeq 3,1$ (à 0,1 près) et $\pi \simeq 3,14$ (à 0,01 près) .

Lorsqu'on écrit $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+x^2+o(x^2)$ on donne plus d'informations qu'avec $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+o(x)$.
 En effet, $\frac{x^2+o(x^2)}{x} = x + x \frac{o(x^2)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$.

Pour reprendre l'analogie avec l'écriture décimale, il y aurait quelque chose de paradoxal à écrire $\pi \simeq 3,14159$ à 0,1 près. En effet, si on annonce une précision à 10^{-1} , quel portée donner à des décimales plus précises ? On a $\pi \simeq 3,199999$ à 0,1 près !

De façon analogue, s'il est vrai que $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+x^2+o(x)$ on a aussi $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+5x^2+o(x) !$

Les propriétés qui ont été vues sur cet exemple sont vraies de façon générale :

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ on a :

$$\text{i. } x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p) \qquad \text{ii. un } o \underset{x \rightarrow 0}{(x^n)} \text{ est un } o \underset{x \rightarrow 0}{(x^p)}$$

En conséquence,

Proposition

Si f admet un $DL_n(a)$ alors, pour tout $p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$ obtenu par **troncature**, c'est-à-dire en supprimant tous les termes de degré supérieurs à $p+1$ (qui se retrouvent englobés dans le reste).

3.2 Formule de Taylor-Young, développements limités de référence

Théorème

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(x) = f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$$

Exemples : donner les $DL_n(0)$ des fonctions suivantes.

a) $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=}$

b) $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=}$

c) $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=}$

d) $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$

e) $(1+x)^\alpha \underset{h \rightarrow 0}{=}$

f) $\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=}$

Remarques :

- ces développements limités sont à connaître par coeur ! On va voir qu'ils permettent, par opérations, de trouver beaucoup d'autres DL .
- La formule de Taylor-Young sera prouvée au second semestre, lors du chapitre d'intégration.

3.3 Propriétés des développements limités

3.3.1 Premières propriétés

Proposition

Il y a **unicité** du développement limité : si f admet un $DL_n(a)$ alors ce développement est unique.

Démonstration

Par l'absurde. Supposons $f(x) = f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1h + \dots + b_ph^p + b_{p+1}h^{p+1} + \dots + b_nh^n + o(h^n)$

■

Proposition

(Développements limités en 0 et parité.)

Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière P .

- si f est paire alors P n'a que des monômes de puissances paires
- si f est impaire alors P n'a que des monômes de puissances impaires

Exemple : les DL_n de $\cos$ et $\sin$ en 0 n'ont que des monômes pairs et impairs respectivement.

Attention : ce n'est valable QUE pour les développements en 0 !

3.3.2 Opérations sur les développements limités

Proposition

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si les fonctions f et g admettent des $DL_n(a)$ alors $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ admettent aussi des $DL_n(a)$.

Plus précisément si $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P_f(h) + o(h^n)$ et $g(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P_g(h) + o(h^n)$ alors :

- la partie régulière du $DL_n(a)$ de $\lambda f + \mu g$ est
- la partie régulière du $DL_n(a)$ de $f \times g$ est

Exemples :

1. Donner un $DL_4(0)$ de $\cosh$
2. Donner un $DL_3(0)$ de $f(x) = \sin x \cos x$

Remarque : on peut gratuitement gagner un ordre sur ce dernier exemple... comment ?

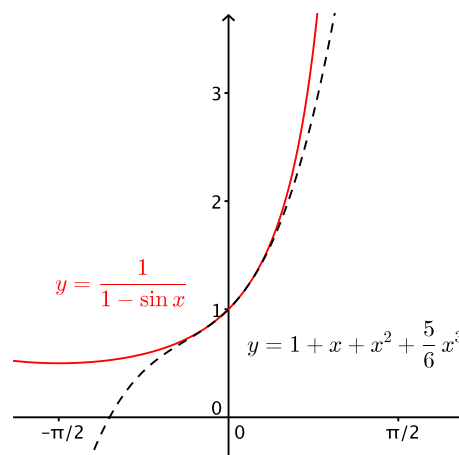
Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$, f et g deux fonctions.

Si f admet un $DL_n(0)$ et g un $DL_n(f(0))$ alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$.

Plus précisément, si P_f et P_g sont les parties régulières des développements de f et g alors le développement de $g \circ f$ a pour partie régulière la troncature de $P_g \circ P_f$ au degré n .

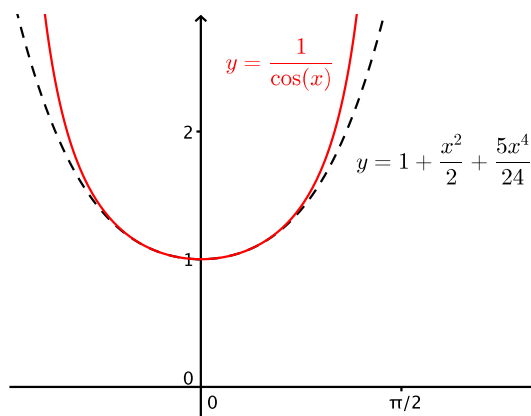
Exemple : déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$



Méthode

Pour calculer le développement limité d'un quotient : on se sert de la composition et du DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Exemple : déterminer le $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{1}{\cos x}$



Exercice

Déterminer le $DL_3(0)$ de $\tan$. (**DL de référence, à connaître**)

3.3.3 Développement d'une primitive, de la dérivée

Proposition

Soit f une fonction et F une primitive de f . Si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière P alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ de partie régulière $F(0) + \int P$.

Remarque : on a noté $\int P$ la primitive de P dont le coefficient constant est 0.

Exemple : rappeler le $DL_4(0)$ de $\frac{1}{1-x}$ puis en déduire le $DL_5(0)$ de $\ln(1-x)$.

Proposition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors f et f' admettent des DL d'ordres respectifs $n+1$ et n en a .

De plus, le DL_n de f' s'obtient en dérivant terme-à-terme le DL_{n+1} de f .

Remarque : l'existence des DL est assurée par

Exemple : rappeler le $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$ puis en déduire celui de $\frac{1}{1+x}$.

3.4 Applications

3.4.1 Etude locale d'une fonction

La formule de Taylor Young permet d'avoir un DL_n pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. La réciproque est-elle vraie ? Si f admet un DL_n alors f est-elle nécessairement de classe $\mathcal{C}^n$?

Proposition

Si f est définie en a :

- i. si f admet un $DL_0(a) : f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b_0 + o(1)$ alors f est continue en a et $f(a) = b_0$;
- ii. si f admet un $DL_1(a) : f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1 h + o(h)$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = b_1$;
- iii. **ATTENTION :** si f admet un $DL_n(a)$ avec $n > 1$ alors on ne peut pas conclure que f est n fois dérivable en a .

Exemple : la fonction $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ vérifie $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$. Elle admet donc un $DL_2(0)$ (de partie régulière nulle), elle n'est pourtant pas deux fois dérivable en 0.

Remarque : dans la proposition précédente, si f n'est pas définie en a , l'existence d'un DL_0 en a permet de prolonger f par continuité en a ; l'existence d'un DL_1 assure que le prolongement obtenu est dérivable en a .

Exercice

Prouver que $f(x) = \frac{\cos x - e^x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable en 0 et déterminer une équation de sa tangente. Précisez les positions relatives de cette tangente par rapport à $\mathcal{C}_f$.

Proposition

Si f admet un DL d'ordre au moins 2 en a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + b_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $b_p \neq 0$ alors la courbe de f admet pour tangente au point d'abscisse a la droite T_a d'équation $y = b_0 + b_1(x-a)$.

De plus, au voisinage de a , les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de T au point d'abscisse a sont déterminées par le signe de $b_p(x-a)^p$.

3.4.2 Etude au voisinage de l'infini

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle $]M; +\infty[$), $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On dit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Remarques :

- Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ et $y = ax + b$ vont devenir très proches au voisinage de $+\infty$.
- Si $a = 0$ on parle d'*asymptote horizontale*, sinon d'*asymptote oblique*.
- La définition s'adapte simplement pour une asymptote en $-\infty$.

Méthode

Pour étudier une fonction au voisinage de $+\infty$: on pose $x = \frac{1}{h}$ et on fait un développement limité pour $h \rightarrow 0$.

Exercice

On considère, pour $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

- Justifier que f est définie au voisinage de $+\infty$.
- Prouver que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
- En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
- Précisez les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote.