Séries numériques

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définition et exemples

Dans ce paragraphe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définition

- On appelle **série de terme général** u_n la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On la note $\sum u_n$.

Exemple : en poursuivant avec les notations de la définition, donner les premiers termes de $\sum u_n$:

Définition

Les termes de $\sum u_n$ s'appellent **sommes partielles** de la série.

Soit $p \in \mathbb{N}$. La $p-$ème somme partielle de $\sum u_n$ est :

Remarque : une somme partielle est donc une somme finie.

Définition

- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** lorsque la suite de ses sommes partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série **diverge**.
- Lorsque la série converge, sa limite est appelée **somme** et on la note
- Lorsque la série converge, le **reste partiel d'ordre** n est

Remarque : étudier la **nature d'une série** c'est décider si elle est convergente ou divergente. C'est l'objectif principal de l'étude d'une série.

1.2 Lien entre suites et séries, objectif de l'étude des séries

Le lien entre suites et séries est très profond.

— D'une part, par définition, <u>une série est une suite</u>. Alors, pourquoi un chapitre dédié aux séries ? Ne peut-on simplement pas appliquer les résultats vus sur les suites ?

La réponse est non. Les séries sont des objets qui apparaissent naturellement et pour lesquels on va chercher des propriétés spécifiques qu'on obtiendra, pour partie seulement, des résultats vus sur les suites.
Lorsqu'on s'intéresse à une série $\sum u_n$, les questions que l'on se pose sont : $\sum u_n$ converge-t-elle ? Si c'est le cas, que vaut sa somme ?

— D'autre part, si l'on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on peut reconstruire la suite à partir de la série :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

Pour étudier une suite, on pourra donc envisager les séries comme un outil.

L'étude des séries sera poursuivie l'an prochain, il est donc important de bien comprendre ce chapitre. On indiquera, en guise de remarques, les directions qui seront explorées dans le cours de seconde année.

1.3 Exemples de référence

1.3.1 Série géométrique

Définition
Une **série géométrique** est une série de la forme

Exemples :

Proposition
Soit $\gamma \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum \gamma^n$ converge si, et seulement si,

Sa somme est alors

Démonstration
Si $\gamma = 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma^n = n+1$ qui diverge vers $+\infty$.

Sinon, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma^n =$ qui converge si, et seulement si, γ^{n+1} converge, ce qui équivaut à $|\gamma| < 1$.

Dans ce cas, $\gamma^{n+1} \to 0$ et la somme de la série vaut $\dfrac{1}{1-\gamma}$. ■

1.3.2 Série harmonique

Définition
On appelle **série harmonique** la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Remarque : la plus petite valeur prise par n est 0.

Exemple : les premiers termes de la série harmonique sont

Proposition
La série harmonique

Démonstration
On a, pour tout $k \geq 1$, $\displaystyle\int \qquad \leq \frac{1}{k}$: $(\star)$ il suit que $\forall n \geq 1$, $\displaystyle\int \qquad \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \iff$

On conclut donc

> **Exercice**
> a) Dans la démonstration précédente, au niveau de $(\star)$, proposer un encadrement de $\frac{1}{k}$.
> b) En déduire un équivalent des sommes partielles de la série harmonique.

1.3.3 Série harmonique alternée

Définition
On appelle **série harmonique alternée** la série $\sum$

Exemple : les premiers termes de la série harmonique alternée sont

Proposition
La série harmonique alternée converge et sa somme vaut $-\ln 2$.

Remarque : la démonstration de cette propriété sera vue en TD.

1.3.4 Série exponentielle

Proposition
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} =$.

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{zx} \end{array} \right.$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = z^k f(x)$.
On applique la formule de Taylor avec reste intégral à f entre 0 et 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(1) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\ \mathrm{d}x$$

Soit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left| \mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq$

Ce qui prouve le résultat annoncé. ■

1.3.5 Un exemple de série téléscopique

Exercice
Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

1.4 Premières propriétés

Dans ce paragraphe, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Proposition
On ne change pas la nature de $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque : ce résultat est intuitif car la nature de $\sum u_n$ est liée au comportement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui ne change pas si l'on modifie un nombre fini de termes.

Démonstration
Supposons que l'on modifie un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour obtenir la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Si l'on n'a modifié aucun terme alors les suites sont égales, les séries sont donc les mêmes et le résultat est évident.
- Sinon, soit $N = \max\{n \in \mathbb{N},\ u_n \neq v_n\}$. Par définition, $N \in \mathbb{N}$.

  $$\forall n \geq N,\ \sum_{k=0}^{n} v_k =$$

  La nature de $\sum v_n$ est donc la même que celle de $\left(\sum_{k=N+1}^{n} u_k \right)_{n \geq N}$ qui est celle de $\sum u_n$.

Finalement, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature. ■

Remarque : en particulier, la propriété précédente permet de passer facilement à des séries « qui ne partent pas de 0 », comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

Proposition
Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ est donc une **condition nécessaire** à la convergence de $\sum u_n$.

Ce n'est **pas une condition suffisante**, un contre-exemple :

Définition
Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Exemples :

a) $\sum n^2$ diverge grossièrement car

b) $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement car

c) $\sum n\sin(\frac{1}{n})$ diverge grossièrement car

Proposition
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries convergentes alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge.

De plus, sa somme vaut :

Attention : on peut avoir $\sum u_n + v_n$ qui converge sans que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne convergent. Par exemple :

Remarque : dans la propriété précédente, on a fait une combinaison linéaire. On peut reformuler la première partie de la propriété :

Proposition (Retour sur le lien entre suite et série)
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge.

Remarque : cela correspond à des séries téléscopiques.

Morale de l'histoire (à ce stade)

- On cherche à quelles conditions sur u_n la série $\sum u_n$ converge ou diverge.
- Si la série converge, on peut chercher à calculer sa somme. Ce sera du cas par cas (et donc on en parlera peu).
- Une condition indispensable pour la convergence de la série est $u_n \to 0$ mais ça n'est pas suffisant. En gros, il y a deux questions à envisager :
  — (u_n) tend-elle assez vite vers 0 ?
  — Si u_n tend lentement vers 0, y a-t-il des phénomènes de compensation entre les termes qui permettent la convergence de la série ?

2 Séries à termes positifs

2.1 Pourquoi ce cas particulier des séries à termes positifs ?

Dans ce paragraphe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels positifs ou nuls.

Proposition
La suite des sommes partielles de $\sum u_n$ admet une limite qui vaut un réel ou bien $+\infty$.

Démonstration

■

Proposition
$\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration
On a vu que la suite des sommes partielles est croissante. Une suite croissante converge si, et seulement si, elle est majorée. ■

2.2 Propriétés des séries à termes positifs

Proposition
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose de plus que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

i.

ii.

Exemple : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Démonstration
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$. Cela implique que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$.

i. Si $\sum v_n$ converge, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ et donc la série à termes positifs $\sum u_n$ est majorée ; on en déduit qu'elle converge.

ii. Si $\sum u_n$ diverge, c'est vers $+\infty$ ce qui implique que la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ n'est pas majorée et donc elle diverge vers $+\infty$.

Proposition
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$. Alors :

i. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

ii. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs.

Dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ c'est dire :

Exemple : $\sum \frac{2}{3n+1}$

Remarque : un « petit o » est un « grand O » ; un équivalent est aussi un « grand O », mais on a mieux :

Proposition
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Démonstration
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} O(u_n)$. En utilisant la propriété précédente, on a alors le résultat.■

Exemple : la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

Remarques :

a) On a un outil efficace pour obtenir des équivalents :

b) **ATTENTION :** les séries doivent être à termes positifs.

2.3 Séries de Riemann

Proposition
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$, positive et monotone.
La série $\sum f(n)$ a même nature que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x$.

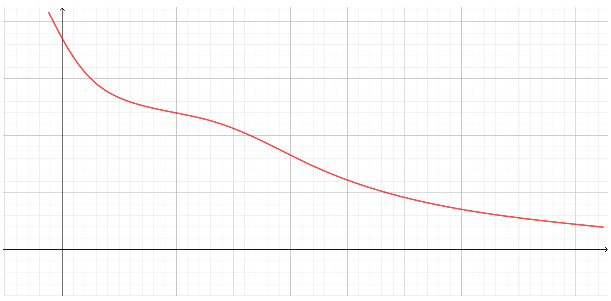
Démonstration
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$, positive et monotone.

— Si f est croissante et non-nulle alors $\sum f(n)$ diverge grossièrement vers $+\infty$.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n_0) > 0$. On a :

$$\forall n \geq n_0,\ \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_{n_0}^n f(x)\ \mathrm{d}x \geq f(n_0)(n-n_0)$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x = +\infty$ et donc la série et l'intégrale ont bien même nature.

— Si f est décroissante :



La série $\sum f(n)$ a donc la même nature que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x$.

Théorème
Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si, et seulement si, $x > 1$.

Démonstration

— Si $x \leq 1$ on a, $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n^x} \geq$ et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

— Si $x > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue, positive et décroissante sur $[1; +\infty[$ et donc

Remarques :

a) On savait que $\frac{1}{n}$ diverge et que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ; le résultat précédent met en évidence le rôle de « frontière » joué par la série harmonique pour les séries de Riemann.

b) Les séries de Riemann sont souvent utilisées pour étudier les séries à termes positifs.

c) Lorsque $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, c'est la **fonction ζ (zêta) de Riemann**.
Cette fonction a des applications très importantes, en particulier sur la répartition des nombres premiers (ce qui semble très éloigné de sa définition).

Remarque : ce paragraphe sur les séries à termes positifs est également valables pour les séries à termes négatifs ; en fait il est valable pour les séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang.

3 Séries absolument convergentes

Définition
On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque

Remarque : $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs et on peut utiliser les résultats qu'on a vu.

Théorème
La convergence absolue implique la convergence.

Autrement dit :

Démonstration
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

- Supposons que $\sum u_n$ soit une série réelle. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad u_n^- = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

  On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n^+, u_n^- \leq |u_n|$ donc $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

  On a également $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n^+ - u_n^-$ et donc $\sum u_n$ converge.

- Si $\sum u_n$ soit une série dont les termes sont complexes, en introduisant les parties réelles et imaginaires, on se ramène au cas précédent et $\sum u_n$ converge.

ATTENTION :

Exemple :

Méthode

Pour prouver qu'une série $\sum u_n$ converge en utilisant la convergence absolue :

1. on détermine le terme général $|u_n|$;
2. on détermine un équivalent simple de $|u_n|$ puis on le compare à une série de référence (souvent géométrique ou de Riemann) ;
3. si la série $\sum |u_n|$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
4. **Attention :** si $\sum |u_n|$ diverge, on ne peut rien dire pour $\sum u_n$.

Exemple : Montrer que $\sum \frac{\mathrm{e}^{in}}{n^2}$ converge.

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série abolument convergente. On a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration

$\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente et les sommes ont du sens.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité triangulaire nous permet d'écrire $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ et on obtient le résultat en passant à la limite. ■

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série, $\sum v_n$ une série à termes positifs qui converge.

Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

Attention : la positivité de $\sum v_n$ est indispensable. De façon générale, la comparaison asymptotique des termes généraux de deux séries ne sert que pour les séries à termes positifs.

Démonstration

$u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ signifie : $\exists M > 0 \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M v_n$ et donc $|u_n| \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge aussi. ■

Exemple : étudions la nature de la série $\sum \frac{\sin n}{n^{\frac{4}{3}} + \cos n}$.

Remarque : l'an prochain, de nouveaux outils seront créés dans le cours, de façon à décider rapidement la nature d'une série. Pour les séries à termes positifs, les comparaisons à des séries géométriques ainsi qu'à des séries de Riemann seront approfondies. Pour les séries dont les termes ne sont pas positifs, le concept de « série alternée » viendra généraliser le cas particulier de la série harmonique.

4 Développement décimal d'un réel

Proposition
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \forall n \geq 1,\ x_n \in [\![0;9]\!] \end{cases}$.
La série $\sum x_n 10^{-n}$ converge.

Démonstration
On a $x_n 10^{-n} \underset{+\infty}{=} O(10^{-n})$ et $\sum 10^{-n}$ est une série à termes positifs convergente. La série $\sum x_n 10^{-n}$ est donc absolument convergente donc convergente. ■

Exemples :

a) $0,22222\cdots =$

b) $0,99999\cdots =$

Remarque : le nombre réel 1 a donc deux développement décimaux distincts ; on parle de développement décimal impropre (car il manque l'unicité). Il s'avère que si l'on exclut ce type de situation avec la suite des décimales qui est « bloque » sur 9, on obtient l'unicité ; c'est l'objet de la proposition ci-dessous :

Proposition
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Il existe une unique suite d'entiers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit de la forme $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \forall n \geq 1,\ x_n \in [\![0;9]\!] \end{cases}$ et qui ne soit pas stationnaire sur 9 telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n 10^{-n} = x$.
- Cette suite s'appelle **développement décimal propre** du réel x.

Proposition
Les rationnels sont les nombres dont l'écriture décimale présente une périodicité à partir d'un certain rang, c'est-à-dire un schéma qui se répète à partir d'un certain rang.

Exemple : Montrons de deux façons différentes que le nombre $2,3573737373\underline{73}\ldots$ est rationnel.