Matrices et applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices et applications linéaires

1.1 Des matrices aux applications linéaires

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Quelle doit être la taille d'une colonne X pour que AX existe ?

2. Quelle est alors la nature de AX ?

3. Que dire de l'application $X \longmapsto AX$?

Définition
Soit n, p deux entiers naturels non nuls, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'**application linéaire canoniquement associée à** A est $\left\{ \begin{array}{ccc} & \longrightarrow & \\ & \longmapsto & \end{array} \right.$

Remarque : pour tout entier non nul r, il y a un isomorphisme évident entre $\mathbb{K}^r$ et $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$, cela permet d'envisager l'endomorphisme canoniquement associé à $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme opérant entre $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Exemples :

1. Quel est l'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$?

2. Que dire de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice nulle ?

3. Que dire de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice carrée ?

4. Que dire de l'endomorphisme associé à I_n ?

Remarque : à partir d'une matrice, on peut donc créer une application linéaire. Essayons de faire le chemin inverse.

1.2 Des applications linéaires aux matrices

On a vu dans le paragraphe précédent que le produit matriciel peut être interprété comme une application linéaire entre des colonnes.

Etant donnés deux espaces vectoriels de dimensions finies E et F, on sait comment représenter leurs vecteurs comme des colonnes :

On a également vu, lors du chapitre 21, qu'une application linéaire est parfaitement déterminée par

Essayons d'asssembler les pièces du puzzle avec un exemple ; on va simplifier un peu les choses en prenant un endomorphisme

Exemple : soit $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.

— Une base de E est $\mathcal{B} =$

— Les vecteurs de E sont de la forme

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par

— L'image du vecteur $x\cos + y\sin$ par u est

— Si l'on écrit les matrices colonnes des vecteurs, on a :

— Du point de vue des colonnes, u correspond donc au produit matriciel (à gauche) par

— Si on change de base dans E, en prenant par exemple

Exercice
Pour poursuivre l'exemple précédent, soit D la dérivation des éléments de E.

a) Justifier que $D \in \mathcal{L}(E)$.
b) Donner la matrice de D dans la base $(\cos, \sin)$.
c) Donner la matrice de D dans la base $(\sin, \cos)$.
d) Donner la matrice de D dans la base $(\cos, x \mapsto \cos(x+1))$.

1.3 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

Définition
Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies, qu'on note $n = \dim E$ et $p = \dim F$.
Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ des bases de E et F respectivement. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- La **matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** est la matrice de taille $p \times n$ dont les colonnes sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ exprimés dans $\mathcal{B}_F$.

- On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$

Exemples :

a) Donner la matrice de la dérivation dans $\mathbb{K}_3[X]$ relativement à la base canonique :

$$\mathrm{Mat}_{can}\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\right) =$$

b) On garde la même application, mais on change de bases :

$$\mathcal{B}_1 = (2, X+1, X^2, X^3-1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 =$$

—

—

—

On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\right) =$$

c) On conserve les notations précédentes. Donner la matrice de l'identité relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

d) Toujours avec les mêmes notations, donner la matrice de l'identité relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.

e) Si l'on regarde la matrice de l'identité dans une même base, on obtient

Remarque : on reprend les notations de la définition. La matrice de u n'a de sens que relativement à un couple de bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Si l'on change les bases, on aura une matrice différente. Cela étant :

— les matrices seront certes différentes, mais elles auront des caractéristiques communes puisqu'elles représentent la même application linéaire.

— Un travail important sera fait (notamment l'an prochain) pour **trouver** des bases dans lesquelles la matrice de u sera *simple* (par exemple une matrice diagonale ou triangulaire).

— On verra, dans ce chapitre, la formulation matricielle du changement de base.

Méthode
Pour trouver la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

1. On calcule $u(\vec{e}_1)$.
2. On exprime ce vecteur dans $\mathcal{B}_F$.
3. Le résultat obtenu est la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$.
4. On recommence pour $\vec{e}_2$ et, ainsi de suite, on construit les n colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$.

1.4 Calcul d'images à l'aide de la matrice

On conserve les notations précédentes : E et F sont deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies, on note $n = \dim E$ et $p = \dim F$. $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ sont des bases de E et F. $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

On dispose de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$: comment calculer l'image d'un vecteur $\vec{x} \in E$ par u ?

— Déjà, c'est facile si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathcal{B}_E$. En effet :

— Sinon, on peut se ramener à $\mathcal{B}_E$:

— On a alors, par linéarité :

— On reconnait :

Méthode
Pour calculer les images d'un vecteur $x \in E$ en utilisant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$:

1. On détermine la décomposition de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_E$.
2. Cela permet d'écrire la colonne $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x})$ qu'on note X.
3. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times X$ est la colonne de $u(\vec{x})$ dans $\mathcal{B}_F$ (c'est-à-dire : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(\vec{x}))$).

Exemple : soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Que vaut $u(X^2)$?

b) Que vaut $u(5X^2 + 3X + 2)$?

2 Correspondance entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

On conserve les notations précédentes : E et F sont deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies, on note $n = \dim E$ et $p = \dim F$. $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ sont des bases de E et F.

Proposition
Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

i. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u) =$

ii. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u + v) =$

Démonstration
Il suffit d'appliquer la définition. ■

Théorème
L'application $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n(\mathbb{K}} \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration
La proposition précédente garantit que l'application est linéaire (elle respecte les sommes et les multiplications par un scalaire, donc elle respecte les combinaisons linéaires).
Une application linéaire est parfaitement déterminée par l'image des vecteurs d'une base, donc u est parfaitement déterminée par $u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)$. Chacun de ces vecteurs de F est lui-même parfaitement déterminé par son expression en coordonnées dans $\mathcal{B}_f$. Finalement, il y a donc une correspondance bijective entre les applications linéaires et les matrices. ■

Remarques :

a) Attention : il y a correspondance bijective **lorsque les bases sont fixées**. Si on change les bases, on change la correspondance (mais elle sera toujours bijective).

b) On va adopter une notation propre au cours pour indiquer que l'on représente les vecteurs d'un espace E comme des colonnes de coordonnées dans une base $\mathcal{B}$: $E_{\mathcal{B}}$.

Proposition (Une conséquence importante)

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) =$$

Démonstration

Proposition
Soit G un troisième espaces vectoriel de dimension finie ; soit $\mathcal{B}_G$, une de ses bases.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) =$$

Démonstration

■

Proposition (Une conséquence importante)
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

u est un isomorphisme si, et seulement si,

Démonstration

$\blacksquare$

Remarques :

a) Les bases choisies n'importent pas : toute matrice qui représente u est inversible.

b) Le lien qu'on avait entrevu sur le vocabulaire « groupe linéaire »prend ici tout son sens.

3 Changements de bases

3.1 Un exemple pour comprendre l'intérêt de trouver une « bonne » base

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^2$ défini par $(x,y) \longmapsto (3x+6y, -x-2y)$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{can}(u)$.

2. Calculer $\mathrm{Mat}_{can}(u)^2$. Qu'en déduire sur u ?

3. Déterminer des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(\vec{a})$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\vec{b})$.

4. Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ est une base de $\mathbb{K}^2$.

5. Que vaut $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$?

6. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Bilan :

3.2 Matrices de passage

Définition
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ en sont deux bases.

- La **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** est la matrice de Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \ .$$

- En pratique, les colonnes de $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$.

Exemple : On prend $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère les bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, 2X-1, X^2-3X)$.

1. Déterminer $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

2. Déterminer $\mathrm{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

3. Calculer $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

4. Pouvait-on prévoir la réponse de la question précédente sans faire le calcul ?

Proposition
On garde les notations de la définition.
Soit $\vec{x} \in E$, on note X et X' les matrices colonnes qui représentent $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a $X = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$.

Démonstration

■

Proposition
Toute matrice carrée inversible de taille n peut être envisagée comme une matrice de passage entre de deux bases de E.

Démonstration
Quitte à composer par des isomoprhismes, on peut considérer que $E = \mathbb{K}^n$.
Soit M une matrice inversible de taille n.
En regardant les colonnes de M comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on a une famille libre de n vecteurs, c'est-à-dire à une base de $\mathbb{K}^n$. M est alors la matrice de passage de cette base à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. ■

3.3 Plusieurs matrices pour une même application linéaire

Soit E, F deux espaces de dimensions n et p ; $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On prend deux bases pour chaque espace : $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$

Proposition
En conservant les notations précédentes :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F} =$$

Définition
Soit M et N deux matrices de même taille. On dit que M et N sont équivalentes si elles représentent la même application linéaire, autrement dit : s'il existe des matrices inversibles P et Q telles que $M = P^{-1}NQ$.

Remarque : on peut vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence *(c'est-à-dire ?)* sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition
Deux matrices équivalentes en lignes ou équivalentes en colonnes sont équivalentes.

Démonstration
Soit deux matrices M et N équivalentes en lignes (resp. en colonnes).
Une opération sur les lignes (resp. sur les colonnes) correspond à une multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice élémentaire, qui est une matrice inversible.
Il existe donc une matrice inversible A telle que $AM = N$ (resp. $MA = N$).

Remarque : dans la démonstration précédente, on a évité de mentionner les dimensions des matrices pour alléger les notations. En effet, M et N n'étant a priori pas carrées, la matrice A n'a pas la même dimension selon qu'on multiplie à gauche ou à droite.

Cas particulier des endomorphismes

Soit M, N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que M et N sont **semblables** lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = P^{-1}NP$.
- Cela correspond à dire que M et N sont les matrices d'un même endomorphisme de K^n relativement à deux bases différentes.

4 Noyau, image et rang d'une matrice

Dans ce paragraphe : n et p désignent des entiers naturels non nuls, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on note u_M l'application linéaire canoniquement associée à M.

4.1 Généralités

Définition
On appelle **noyau** de la matrice M et on note $\ker M$ le noyau de u_M.

Exemple : déterminer le noyau de $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Remarque : trouver le noyau d'une matrice M correspond à la résolution d'un système linéaire homogène dont la matrice est M.

Méthode

Pour trouver le noyau d'une matrice M de taille $n \times p$:

1. on échelonne et on réduit M en faisant des opérations sur les lignes ;
2. le noyau de M est celui de la matrice obtenue ;
3. on exprime les coordonnées principales en fonction des coordonnées secondaires pour faire apparaître un Vect.
4. On vérifie que les vecteurs obtenus ont bien p coordonnées.

Remarque : il est facile de vérifier qu'on a bien obtenu des vecteurs du noyau, il suffit de faire le produit matriciel.

Définition

On appelle :

— **image** de la matrice M et on note $\mathrm{Im}M$ l'image de u_M ;

— **rang** de la matrice M et on note $\mathrm{rg}\ M$ le rang de u_M.

Exemple : on reprend l'exemple précédent. Déterminer l'image et le rang de M.

Proposition

On note $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de M.
Le rang de M est également le rang de la famille $C_1, \ldots, C_p$.

Démonstration

On revient aux définitions : le rang de M est le rang de u_M c'est-à-dire la dimension de $\mathrm{Im}u_M$. Or, $(C_1, \ldots, C_p) = (u_M(e_1), \ldots, u_M(e_p))$ avec $(e_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. ■

Méthode

Pour trouver une base de l'image d'une matrice M :

— l'image de la matrice M est l'espace généré par ses colonnes ;

— pour extraire une base, on applique l'algorithme de Gauss **sur les colonnes**.

Remarque : dans l'exemple précédent, avait-on besoin de déteminer l'image de M pour en avoir le rang ?

Théorème (du rang)

Démonstration

Il suffit de traduire en termes d'applications linéaires et d'appliquer le théorème du rang (pour les applications linéaires). ■

4.2 Propriétés du rang

Proposition
Deux matrices équivalentes ont même rang.

Démonstration

■

Proposition
La multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang.

Démonstration

■

Proposition

$$\text{rg } M \leq$$

Démonstration

■

Proposition

$$\text{rg } {}^tM = \text{rg } M$$

Idée de la démonstration : le rang ne change pas lorsqu'on fait des opérations sur les lignes ou sur les colonnes. Or, les colonnes de M sont les lignes de ${}^tM$.

Méthode
Pour trouver le rang d'une matrice M : on applique l'algorithme de Gauss sur les lignes ou sur les colonnes.

Exemple : Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$