Variables Aléatoires

Dans ce chapitre, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

1 Variables aléatoires

1.1 Généralités, notations

Introduction
Historiquement, la notion de variable aléatoire a été introduite pour l'étude des gains dans des jeux d'argent. Doit-on jouer ? Combien d'argent peut-on espérer gagner ? Puis, une question à laquelle on ne répondra pas (mais qui intéresse tous les joueurs) : existe-t-il des façons de jouer qui favorisent le gain ?
De façon générale, **une variable aléatoire est une quantité numérique associée au résultat d'une expérience aléatoire**.

> **Définition**
> Une **variable aléatoire réelle** sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Exemples : Les deux exemples qui suivent vont être utilisés pour illustrer toutes les notations qui suivront dans ce paragraphe.

a) On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Soit X le nombre de « Pile » obtenus.
L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ (en notant PF l'issue « obtenir Pile puis Face ») et on a :
$$X(PP) = 2 \quad ; \quad X(PF) = 1 \quad ; \quad X(FP) = 1 \quad ; \quad X(PP) = 0.$$

b) On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit Y le produit des faces obtenues.
On peut modéliser cette expérience aléatoire en considérant qu'une de ses issues est le couple des résultats obtenus, l'univers est alors $[\![1, 6]\!]^2$. On a :
$$Y : \left\{ \begin{array}{l} [\![1, 6]\!]^2 \to \mathbb{R} \\ (i, j) \mapsto i \times j \end{array} \right. .$$
Par exemple, $Y((3, 5)) = 15$ et $Y((6, 2)) = Y((4, 3)) = 12$.

Remarque : dans l'exemple précédent, la modélisation du lancé de deux dés n'est pas unique. Par exemple, quelle différence faire entre les issues $(3, 2)$ et $(2, 3)$ si les dés sont indiscernables ? Pour lever cette difficulté on peut prendre pour issues les couples $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$ avec $i \leqslant j$.
Qu'il soit possible de choisir entre plusieurs modélisations pour une expérience aléatoire n'est pas une difficulté en soi. Néanmoins, il est important de comprendre quels sont les qualités et les défauts de la modélisation choisie dans la description de l'expérience.

Notation :
Puisque Ω est fini, son image par X est une partie finie de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le cardinal de $X(\Omega)$; on note :
$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} .$$
On dit aussi parfois que X est une variable aléatoire réelle finie ou encore que X prend un nombre fini de valeurs.

Exemples :

a) Pour le lancers de pièce, le nombre X de Pile prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

b) Dans le cas du lancé de deux dés, le produit des résultats est Y qui prend ses valeurs dans $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$.

Ces deux exemples illustrent une situation fréquente : l'univers peut être difficile à décrire (et ça peut d'ailleurs ne pas être utile), par contre <u>on décrira toujours l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire</u>.

Notation
On a deux ensembles « reliés » par la variable aléatoire X : Ω et $X(\Omega)$.

— Soit $A \subset X(\Omega)$. Pour décrire l'événement constitué des issues $\omega \in \Omega$ telles que $X(\omega) \in A$ plutôt que d'utiliser la notation $X^{-1}(A)$ on va simplement écrire $(X \in A)$ (ou $\{X \in A\}$).

— De façon analogue, si $x \in \mathbb{R}$, on considérera les événements $(X = x)$, $(X \leqslant x)$, ...

Exemples :

a) Dans le cas de deux lancers de pièce, soit l'événement E : « obtenir exactement une fois Pile ». On peut détailler $E = \{PF, FP\} \subset \Omega$ mais on préférera le noter $(X = 1)$.

b) Dans le cas du lancé de deux dés, l'événement « le produit des résultats est strictement inférieur à 5 » sera noté $(Y < 5)$.
Il correspond à la partie $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(4,1)\}$ de l'univers.

Remarques :

1. Une variable aléatoire *réelle* est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Si l'ensemble d'arrivée n'est plus $\mathbb{R}$ (ou une de ses parties) on obtient une variable aléatoire qui n'est pas réelle. Par exemple, une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sera appelée *vecteur aléatoire*.

2. L'ensemble des variables aléatoires sur Ω est $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$, c'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Exemple : considérons à nouveau le lancé de deux dés ainsi que la variable aléatoire Y qui vaut le produit des faces obtenues. Rajoutons une hypothèse : les dés sont équilibrés.
Cela assure qu'on a équiprobabilité sur l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$; le calcul de la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ se ramène donc à un calcul de dénombrement : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\sharp A}{\sharp \Omega}$.

On a : $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(\{(1,4),(2,2),(4,1)\}) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.
De façon analogue : $\mathbb{P}(Y \in \{1,2,3\}) = \mathbb{P}(\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}) = \dfrac{5}{36}$.

On va créer une nouvelle probabilité, non plus sur Ω mais sur $Y(\Omega)$.

Proposition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

— L'application $\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array} \right.$ définit une probabilité sur $X(\Omega)$.

— $\mathbb{P}_X$ est appelée **loi (de probabilité) de** X.

— $X(\Omega)$ est fini donc $\mathbb{P}_X$ est complètement définie lorsqu'on connaît $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$.

Remarque : on utilisera indifféremment $\mathbb{P}(X = x_i)$ ou $\mathbb{P}_X(\{x_i\})$, qu'on pourra aussi noter (abusivement) $\mathbb{P}_X(x_i)$.

Exemple : soit X le nombre de « Pile » obtenus en lançant deux fois une pièce équilibrée.

On a déjà vu que X prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$. Puisqu'on a équiprobabilité sur l'univers, on peut en déduire la loi de X :

x_i	0	1	2	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

On a $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X \in \{1,2\}) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{3}{4}$.

Attention
Il y a équiprobabilité sur l'univers $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ mais pas sur $X(\Omega) = \{0,1,2\}$.

Méthode
Pour donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, il faut :

1. décrire l'ensemble des valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$;
2. donner $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour toutes les valeurs prises par X.

Lorsque X prend un nombre assez faible de valeurs, on peut résumer ces informations dans un tableau :

x_i	x_1	$\dots$	x_n	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$		$\dots$		1

avec des réels positifs.

Remarque : la dernière colonne sert à ne pas oublier que la somme des probabilités vaut 1 ; elle n'est donc pas indispensable mais permet d'éviter des erreurs.

Exemple : une urne contient 10 boules : 7 rouges et 3 noires, qui sont indiscernables au toucher.
On tire, successivement et sans remises, trois boules de l'urne. Soit X le nombre de boules rouges, déterminons la loi de X.

— On a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

— Une issue de l'expérience aléatoire est un sous-ensemble de 3 boules parmi les 10 de l'urne, le cardinal de l'univers est donc $\binom{10}{3}$. Puisque les boules sont indiscernables, on a équiprobabilité sur cet univers et on en déduit la loi de X :

x_i	0	1	2	3	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}$	$\frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}}$	$\frac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}}$	$\frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}$	1

Proposition (Image d'une variable aléatoire par une fonction)
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
$\varphi(X)$ est une nouvelle variable aléatoire dont la loi de probabilité se déduit de celle de X :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}_{\varphi(X)}(x) = \mathbb{P}\left(\varphi(X) = x\right) = \mathbb{P}\left(X \in \varphi^{-1}(\{x\})\right) = \mathbb{P}_X\left(\varphi^{-1}(\{x\})\right)$$

Exemple : on lance deux fois de suite une pièce de monnaie, X est le nombre de « Pile » obtenus.
On connaît la loi de X :

x_i	0	1	2	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

On joue selon la règle suivante : la participation coute 10€et chaque « Pile » obtenu rapporte 8€.
Le **gain**, c'est-à-dire la différence entre ce qui est gagné et dépensé, est alors la variable aléatoire $G = 8X - 10$.
La loi de G est :

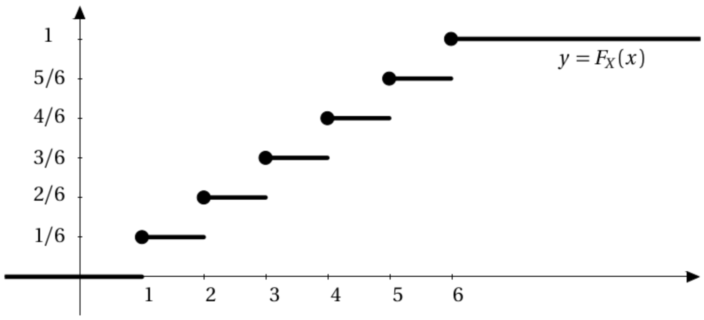
g_i	-10	-3	6	Total
$\mathbb{P}(G = g_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

1.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

On appelle **fonction de répartition** de X la fonction $F_X : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array}\right.$.

Exemple : on lance un dé équilibré et on considère X, la valeur de la face visible. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est :



Méthode
Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X dont on connaît la fonction de répartition F_X on procède en deux étapes :

1. Les valeurs prises par X sont les points de discontinuité de F_X. On les note $x_1 < \cdots < x_n$.
2. On a $\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1)$ puis, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

Exemple : considérons la variable aléatoire Z dont la fonction de répartition est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -3 \\ 0,2 \text{ si } -3 \leqslant x < -1 \\ 0,7 \text{ si } -1 \leqslant x < 5 \\ 1 \text{ si } 5 \leqslant x \end{cases} .$$

La loi de probabilité de Z est :

z_i	-3	-1	5	Total
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$	1

.

Proposition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$, F_X sa fonction de répartition.

i. F_X est une fonction en escalier.

ii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

iii. F_X est croissante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y \Longrightarrow F_X(x) \leqslant F_X(y)$.

Méthode
Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne vérifie pas une des propriétés précédentes alors f n'est pas une fonction de répartition. Cela permet :

1. de vérifier la cohérence d'une réponse proposée ;
2. de disqualifier f comme candidat pour la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

2 Espérance d'une variable aléatoire

Notations : X désigne une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose que X prend n valeurs distinctes : $x_1, \ldots, x_n$.

Définition
L'**espérance** de X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i) .$$

Remarques :

1. On note souvent (de façon abusive) $\sum x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ plutôt que $\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$.

   Par défaut, lorsque le symbole $\sum$ est incomplet, cela signifie que la somme porte sur toutes les valeurs que prend la variable aléatoire.
2. On peut réécrire la définition de $E(X)$ en faisant apparaître les issues de l'expérience aléatoire :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

Exemples :

1. On considère X le nombre de « Pile » obtenu en deux lancés d'une pièce équilibrée. On rappelle que l'univers est $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ et que la loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

   Calculons $E(X)$ avec les deux formules :
   — $E(X) = \sum x_i \mathbb{P}(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$;
   — $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$
   $= X(PP)\mathbb{P}(\{PP\}) + X(PF)\mathbb{P}(\{PF\}) + X(FP)\mathbb{P}(\{FP\}) + X(FF)\mathbb{P}(\{FF\})$
   $= 2 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 1.$
2. On considère Y la variable aléatoire dont la loi de probabilité est :

y_i	-2	0	5	Total
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$	1

   On a : $E(Y) = \sum y_i \mathbb{P}(Y = y_i) = -2 \times (0,2) + 0 \times 0,5 + 5 \times 0,3 = 1,1.$

Remarques :

— Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la moyenne des valeurs que prendra X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.
Si X est le gain à un jeu, $E(X)$ est donc ce que l'on peut espérer gagner, en moyenne.

— L'espérance peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives.

Vocabulaire

— On dit que la variable aléatoire X est **centrée** lorsque $E(X) = 0$.

— Lorsque la variable aléatoire G est le gain d'un joueur à un jeu d'argent, on dit que le jeu est **équilibré** si G est centrée ; le jeu avantage un des joueurs sinon.

Théorème (de transfert)
Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ vaut :

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\mathbb{P}_X(x_i) \ .$$

Exemple : On lance un dé équilibré. Soit X le résultat obtenu, déterminons $E(X^2)$.
On a : $E(X^2) = \sum x_i^2 \mathbb{P}_X(x_i) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{1}{6} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}.$

Proposition
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Remarques :

1. En prenant $b = -E(X)$, la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée.
2. Cette proposition est une conséquence du théorème de transfert : c'est le cas particulier $\varphi(x) = ax + b$.

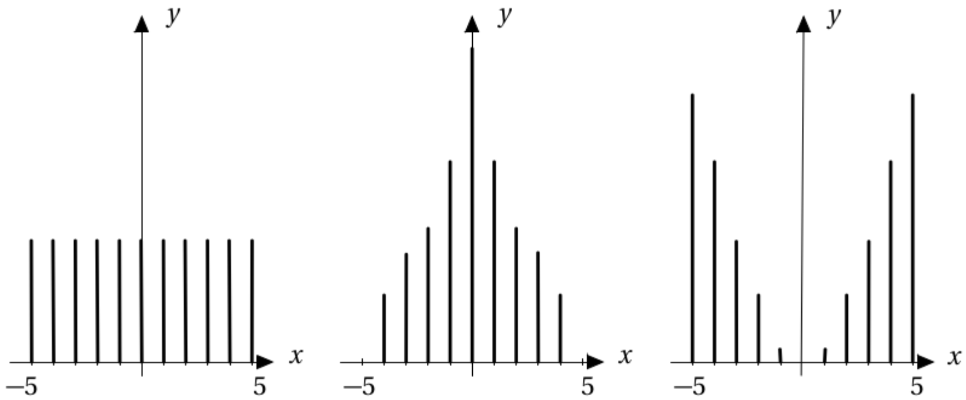
Proposition
L'espérance est une application linéaire entre l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur Ω et $\mathbb{R}$. Pour toutes variables aléatoires X et Y, pour tous réels λ et μ on a :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

3 Variance d'une variable aléatoire

Exemple : Le tableau ci-dessous décrit les lois de probabilités de trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 qui prennent les mêmes valeurs et qui sont toutes centrées :

x_i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	Total
$\mathbb{P}(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	1
$\mathbb{P}(X_2 = x_i)$	0	$0,05$	$0,08$	$0,1$	$0,15$	$0,24$	$0,15$	$0,1$	$0,08$	$0,05$	0	1
$\mathbb{P}(X_3 = x_i)$	$0,2$	$0,15$	$0,09$	$0,05$	$0,01$	0	$0,01$	$0,05$	$0,09$	$0,15$	$0,2$	1



X_1, X_2 et X_3 prennent les mêmes valeurs, ont la même espérance mais elles sont sensiblement différentes : la densité de probabilité de X_1 est répartie de façon uniforme, celle de X_2 est plus « concentrée » autour de 0, celle de X_3 est plus « dispersée » vers les valeurs extrêmes.

L'objet de la variance est de mesurer la dispersion de la densité autour de son espérance.

Définition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

— La **variance** de X est le réel positif défini par $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.

— L'**écart-type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

— On dit que X est **réduite** lorsque $V(X) = 1$.

Exemples :

1. Calculons les variances des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 dont on rappelle les densités de probabilité :

x_i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
$\mathbb{P}(X_2 = x_i)$	0	$0,05$	$0,08$	$0,1$	$0,15$	$0,24$	$0,15$	$0,1$	$0,08$	$0,05$	0
$\mathbb{P}(X_3 = x_i)$	$0,2$	$0,15$	$0,09$	$0,05$	$0,01$	0	$0,01$	$0,05$	$0,09$	$0,15$	$0,2$

On rappelle que ces trois variables sont centrées, autrement dit leur espérance vaut 0.

$$V(X_1) = E((X_1 - E(X_1))^2) = E(X_1^2) = (-5)^2 \tfrac{1}{11} + (-4)^2 \tfrac{1}{11} + \cdots + 5^2 \tfrac{1}{11} = \tfrac{2\times(25+16+9+4+1)}{11} = 10$$

$$V(X_2) = E((X_2 - E(X_2))^2) = E(X_2^2) = (-5)^2 \times 0 + (-4)^2 \times 0,05 + \cdots + 5^2 \times 0 = 4,14$$

$$V(X_3) = E((X_3 - E(X_3))^2) = E(X_3^2) = (-5)^2 \times 0,2 + (-4)^2 \times 0,15 + \cdots + 5^2 \times 0,2 = 16,84$$

2. On considère la variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est donnée par :

y_i	-5	2	10	Total
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$0,7$	$0,2$	$0,1$	1

— Commençons par calculer l'espérance de Y.
On a : $E(Y) = \sum y_i \mathbb{P}(Y = y_i) = -5 \times 0,7 + 2 \times 0,2 + 10 \times 0,1 = -2,1$.

— On peut alors calculer la variance de Y :
$V(Y) = E((Y - E(Y))^2) = E((Y + 2,1)^2) = \sum (y_i + 2,1)^2 \mathbb{P}(Y = y_i)$
$= (-5 + 2,1)^2 \times 0,7 + (2 + 2,1)^2 \times 0,2 + (10 + 2,1)^2 \times 0,1 = 23,89$.

Remarques :

a) $V(X)$ est une somme de nombres positifs, donc c'est un nombre positif.

b) Si $V(X) = 0$ alors tous les termes de la somme sont nuls. Cela implique que X prend une certaine valeur $x \in X(\Omega)$ avec une probabilité 1 et toutes les autres valeurs de X ont une probabilité nulle.

Proposition (Kœnig-Huygens)
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Méthode
La propriété de Kœnig-Huygens permet de calculer la variance d'une variable aléatoire plus rapidement qu'avec la définition.

Exemple : reprenons le calcul de la variance de la variable aléatoire Y dont la densité de probabilité est donnée par :

y_i	-5	2	10	Total
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$0,7$	$0,2$	$0,1$	1

On a déjà calculé $E(Y) = -2,1$.
On a $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = E(Y^2) - 4,41 = 25 \times 0,7 + 4 \times 0,2 + 100 \times 0,1 - 4,41 = 23.89$.

Proposition (Effet d'une dilatation et d'une translation sur la variance)
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$, a et b deux réels. On a $V(aX + b) = a^2 V(x)$.

Conséquence importante :
Il suit que, si $V(X) \neq 0$ (ce qui est vrai sauf lorsque X ne prend qu'une valeur) :

- $\dfrac{X}{\sqrt{V(X)}}$ est une variable aléatoire réduite ;
- $\dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{V(X)}{\alpha^2} .$$

Remarque : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev illustre que la variance est un **indicateur de dispersion**. Lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience, plus la variance est élevée, plus les valeurs prises par la variable aléatoire seront étalées.

4 Lois usuelles

Objectif
Nous allons détailler pour quelques lois usuelles :

— les épreuves aléatoires dans lesquelles elles apparaissent ;

— les lois de probabilités ;

— les calculs de l'espérance et de la variance.

Remarque : ces exemples constituent une occasion de comprendre le sens pratique de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire :

- l'espérance est un indicateur de position, il correspond à la valeur moyenne que prendra la variable aléatoire sur un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire ;
- la variance mesure la dispersion des valeurs de la variable aléatoire, autour de la valeur centrale : l'espérance.

4.1 Loi certaine

Exemple : la loi certaine est la loi d'une variable aléatoire pour laquelle une seule valeur peut se produire, par exemple le lancé d'un dé truqué pour lequel le résultat X est toujours 2. La loi de probabilité de X est alors résumée par :

x_i	1	2	3	4	5	6	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0	1	0	0	0	0	1

Les valeurs $1, 3, 4, 5$ et 6 de X ayant une probabilité nulle, on peut les omettre du tableau résumant la loi de probabilité de X qui devient alors simplement :

x_i	2	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	1	1

Définition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On dit que X suit une **loi certaine** lorsqu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$.

Proposition
Soit X un variable aléatoire qui suit une loi certaine sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$. On a alors :

— $E(X) = x$;

— $V(X) = 0$.

Remarque : cela a déjà été noté auparavant, une variable aléatoire ayant une variance nulle suit une loi certaine.

4.2 Loi uniforme

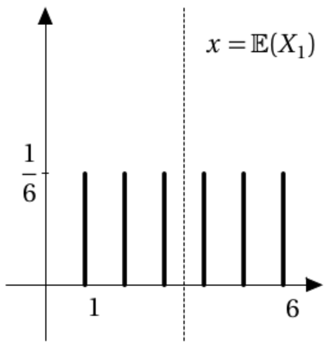
Exemple : la loi uniforme est celle d'une variable aléatoire dont les valeurs sont équiprobables ; par exemple le lancé d'un dé équilibré dont le résultat est X.
La loi de probabilité de X est alors :

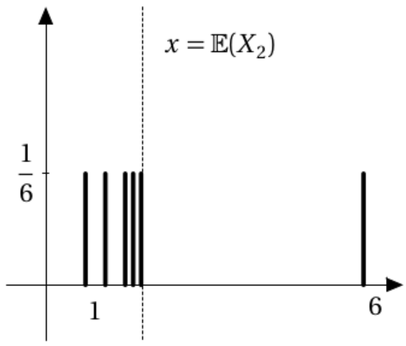
x_i	1	2	3	4	5	6	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Définition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose que $X(\Omega)$ a pour cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
On dit que X suit une **loi uniforme** lorsque, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $\mathbb{P}_X(x_i) = \dfrac{1}{n}$.

Proposition
Avec les notations de la définition. L'espérance et la variance de X dépendent des valeurs prises par X.

- On a toujours $E(X) = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$;
- dans le cas où $\{x_1, \ldots, x_n\} = [\![1, n]\!]$, $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$;
- dans le cas où les valeurs prises par X sont harmonieusement réparties dans l'intervalle $[a, b]$ on a $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$.





4.3 Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$

Vocabulaire :
Une expérience aléatoire est dite **binaire** (ou **de Bernoulli**) lorsqu'elle n'a que deux issues possibles. De façon analogue, une variable aléatoire binaire est une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs.

Définition

- La loi d'une variable aléatoire binaire X qui ne prend que deux valeurs : 0 et 1 s'appelle **loi de Bernoulli**.
- En posant $\mathbb{P}(X = 1) = p$, la densité de probabilité de X est alors :

x_i	0	1	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1 - p$	p	1

- Les événements $(X = 0)$ et $(X = 1)$ sont appelés **succès** et **échec**.
- Soit $p \in [0, 1]$. On note $\mathcal{B}(p)$ la loi de Bernoulli de paramètre p. Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(p)$ on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple : on joue à Pile ou Face et on considère que Pile correspond au succès, on le représente par $X = 1$; Face correspond à un échec, on le représente par $X = 0$.

— Si la pièce est équilibrée, on a $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2}$, autrement dit X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

— Si la pièce donne deux fois plus souvent Pile que Face, on a $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{3}$; autrement dit X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

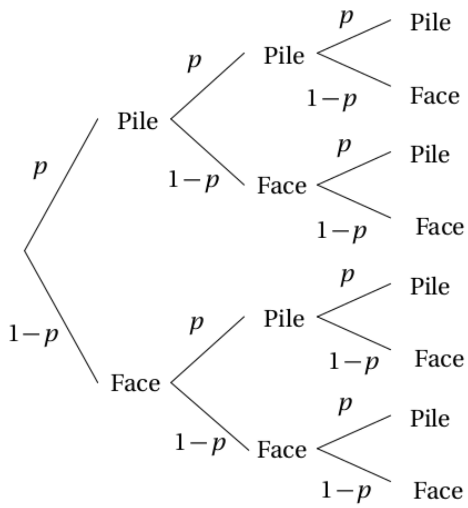
Proposition
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On a :
— $E(X) = p$;
— $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration
On applique les définitions :
— $E(X) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p$;
— $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

4.4 Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$

Exemple : soit une pièce de monnaie qui tombe sur la Pile avec une probabilité $p \in [0,1]$. On la lance trois fois de suite ; on considère X le nombre de Pile obtenus.

— On peut représenter l'expérience aléatoire par un arbre probabiliste :



X prend ses valeurs dans $[\![0,3]\!]$ et on détermine la loi de X par lecture de l'arbre. Par exemple, il y a trois chemins de l'arbre qui composent l'événement $(X=2)$, chaque chemin a une probabilité $p^2(1-p)$ et donc $\mathbb{P}(X=2)=3p^2(1-p)$. Finalement :

x_i	0	1	2	3	Total
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3	1

— Chaque lancer est une expérience de Bernoulli ; si l'on appelle succès le fait d'obtenir Pile et échec le fait d'obtenir Face, X est alors le nombre de succès obtenus en trois lancers.

— Les expériences de Bernoulli sont indépendantes : le résultat d'un des lancers n'influe pas sur les suivants.

— On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et p.

Remarque : si, pour chaque lancer, on code un succès par 1 et un échec par 0, alors une issue de l'épreuve est représentée par un triplet de $\{0,1\}^3$ et X est la somme des composantes du triplet. Par exemple : $(1,1,0)$ signifie qu'on a eu Pile-Pile-Face et on a alors $X=1+1+0=2$.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

— La **loi binomiale de paramètres** n **et** p est la loi d'une variable qui compte le nombre de succès quand on répète de façon indépendante n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

— On note $\mathcal{B}(n,p)$ la loi binomiale de paramètres n et p. Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

- X prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
- Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on a : $\mathbb{P}(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Démonstration

— X est le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli, on a donc bien $X \in [\![0,n]\!]$.

— Si on représente l'expérience aléatoire par un arbre probabiliste, on aura 2^n chemins dans l'arbre. Soit $k \in [\![0,n]\!]$, les chemins qui correspondent à l'événement $(X=k)$ comportent k succès et $n-k$ échec, la probabilité d'un tel chemin est donc $p^k(1-p)^{n-k}$. Or, il y a autant de chemins qui correspondent à l'événement $(X=k)$ que de façons de placer k succès en n tentatives, soit $\binom{n}{k}$.
Finalement, on a bien : $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

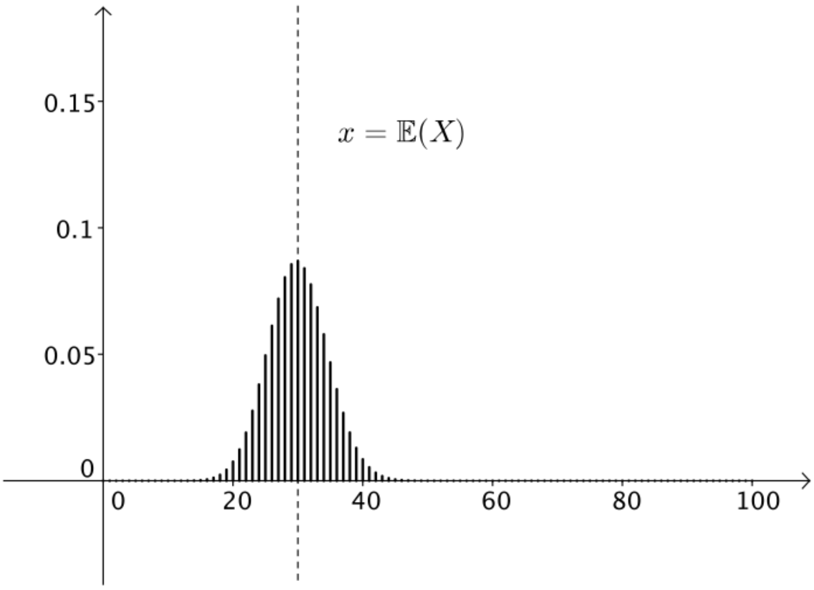
Remarque : soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. La densité de $\mathcal{B}(n,p)$ se retrouve dans le développement de $(p+(1-p))^n$ à l'aide de la formule du binôme :

$$(p+(1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) \ .$$

Cette observation permet de vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$.

Méthode
Pour justifier qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale, des mots-clés doivent apparaître : « compter les succès », « répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ».

Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
- $E(X) = np$;
- $V(X) = np(1-p)$.



Remarque : on observe une allure qui évoque la densité d'une loi normale (mais on n'en dira pas d'avantage).

5 Plusieurs variables aléatoires

5.1 Couple de variable aléatoires

Motivation : on a, sur un même univers probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ deux variables aléatoires X et Y dont on connait les lois de probabilités $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$. Peut-on déduire la probabilité de l'événement $(X=Y)$ de $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$?
La réponse est non car on a besoin de plus d'informations : il faut connaître le lien entre X et Y.

Définition
La **loi conjointe de** X Y la loi du couple (X,Y). On la note $\mathbb{P}_{X,Y}$.
On a donc : $\mathbb{P}_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}((X,Y)=(x,y)) = \mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y))$: $(\star)$.

Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$ et Y les valeurs $y_1, \dots, y_m$, la loi conjointe de X et Y peut être présentée sous la forme du tableau :

$Y \backslash X$	$\dots$	x_i	$\dots$
$\vdots$			
y_j		$\mathbb{P}_{X,Y}(x_i, y_j)$	
$\vdots$			

Remarques :

1. les notations introduites dans la définition sont conservées dans la suite du paragraphe.
2. La ligne $(\star)$ a été formulée pour des événements « élémentaires » $(X = x)$ et $(Y = y)$ mais on aurait pu prendre des événements « composés » $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ en écrivant :

$$\mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) = \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) \ : (\star)$$

3. L'ensemble $\{(x_i, y_j)/(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]\}$ est un système complet d'événements. Cela implique que la somme des probabilités indiquées dans le tableau doit être égale à 1 : $\sum\limits_x \sum\limits_y \mathbb{P}_{X,Y}(x;y) = 1$.
4. Dans la somme ci-dessus x et y parcourent les valeurs prises par X et Y.
Autrement dit : $x \in \{x_1, \dots x_n\}$ c'est-à-dire $x \in X(\Omega)$.

Exemple :

Soit X et Y deux variables aléatoires dont on connait la loi conjointe :

$Y \backslash X$	1	2	3	4
0	0,2	0,1	0	0,1
1	0,1	0	0	0,2
2	0	0,1	0,2	0

.

1. Que vaut $\mathbb{P}_{X,Y} = (1,1)$?
Il suffit de lire le tableau : $\mathbb{P}_{X,Y}(1,1) = \mathbb{P}((X,Y) = (1,1)) = 0,1$.
2. Que vaut $\mathbb{P}_{X,Y}(\{1;2\}^2)$?
$\mathbb{P}_{X,Y}(\{1;2\}^2) = \mathbb{P}((X,Y) \in \{1;2\}^2) = \mathbb{P}((X \in \{1;2\}) \cap (Y \in \{1;2\}))$.
On a donc :$\mathbb{P}_{X,Y}(\{1;2\}^2) = \mathbb{P}_{X,Y}(1,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(1,2) + \mathbb{P}_{X,Y}(2,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(2,2) = 0,2$.
3. Que vaut $\mathbb{P}(X = Y)$?
On a $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}_{X,Y}(\{(1;1);(2;2)\}) = \mathbb{P}_{X,Y}(1,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(2,2) = 0,2$.
4. Que vaut $\mathbb{P}_X(4)$?
On a $\mathbb{P}_X(4) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}_{X,Y}(\{(4;0);(4;1);(4;2)\}) = \mathbb{P}_{X,Y}(4,0) + \mathbb{P}_{X,Y}(4,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(4,2) = 0,3$.
5. Que vaut $\mathbb{P}_{X=1}(Y = 1)$?
Il s'agit d'une probabilité conditionnelle, on revient aux définitions :

$$\mathbb{P}_{X=1}(Y = 1) = \frac{\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1))}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{\mathbb{P}_{X,Y}(1,1)}{\mathbb{P}_X(1)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

Proposition
Etant donné un couple de variables aléatoires (X,Y) dont on connait la loi conjointe $\mathbb{P}_{X,Y}$, on peut retrouver les **lois marginales** $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$.

On a : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}_X(x) = \sum\limits_y \mathbb{P}_{X,Y}(x,y)$ et $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_Y(y) = \sum\limits_x \mathbb{P}_{X,Y}(x,y)$.

Remarque : le contraire est faux. En règle général on ne peut pas déduire la loi conjointe de X et Y. Sur l'exemple précédent on ne peut pas déduire $\mathbb{P}_{X,Y}$ de $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$.

5.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition
On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes lorsque :

$$\forall x, y,\ \mathbb{P}_{X,Y}(x;y) = \mathbb{P}_X(x) \times \mathbb{P}_Y(y)$$

Exemple : on poursuit l'exemple précédent. X et Y sont-elles indépendantes ?
On a $\mathbb{P}_{X,Y}(2,1) = 0$ et $\mathbb{P}_X(2) \times \mathbb{P}_Y(1) = 0,2 \times 0,3 \neq 0$: X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Proposition
Supposons que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes.
Pour tous événements $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ on a $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$.

Exemple : soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois binomiales de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$. Que vaut $\mathbb{P}(X = Y)$?
X et Y prennent leurx valeurs dans $[\![0;3]\!]$. On a donc $(X = Y) = \{(0,0);(1,1);(2,2);(3,3)\}$ et il suit que $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}_{X,Y}(0,0) + \mathbb{P}_{X,Y}(1,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(2,2) + \mathbb{P}_{X,Y}(3,3)$.
X et Y sont indépendantes ; pour tout $i \in [\![0;3]\!]$ on a donc $\mathbb{P}_{X,Y}(i,i) = \mathbb{P}_X(i)\mathbb{P}_Y(i)$. Or, X et Y ont la même densité $\mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=0}^{3} \left(\binom{3}{i} \frac{1}{2^3} \right)^2 = \frac{1}{64}(1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

Proposition
Soit X et Y des variables aléatoires, f et g deux fonctions.

Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Remarque : pour que $f(X)$ et $g(Y)$ aient du sens, il faut que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_f$ et $Y(\Omega) \subset \mathcal{D}_g$.

5.3 Généralisation à n variables aléatoires

Définition
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires.

- La **loi conjointe** de $X_1, \ldots, X_n$ est la loi du $n-$uplet $(X_1, \ldots, X_n)$. On la note $\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n}$.
- Les **lois marginales** $\mathbb{P}_{X_1}, \ldots, \mathbb{P}_{X_n}$ peuvent être déduites de la loi conjointe, mais on ne peut pas faire le contraire.
- On dit que les variables aléatoires sont **mutuellement indépendantes** lorsque, pour tous $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}_{X_1}(x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{X_n}(x_n)$$

Remarque : dans la définition de l'indépendance mutuelle, pour chaque i on a $x_i \in X_i(\Omega)$.

Exemple : soit une urne qui comporte des boules numérotées. Si on fait 5 tirages avec remise et que X_i désigne le numéro de la boule tirée au $i-$ème tirage, alors les variables X_i sont mutuellement indépendantes.
Par contre, si Y_i désigne la somme des numéros des boules obtenues lors des i premiers tirages alors les Y_i ne sont pas mutuellement indépendantes.

Proposition
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.

Alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque : c'est la définition qu'on a donné pour la loi binomiale ! On a un peu un serpent qui se mord la queue... En fait, l'expression algébrique $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ est la définition de la loi binomiale et la propriété que l'on vient de voir explique dans quel type de situation on s'en sert.