Chapitre 1 : Boîte à outils

1 Elements de logique et notations mathématiques

1.1 Propositions, connecteurs

Définition
Une proposition mathématique est une assertion qui peut prendre deux valeurs : Vrai ou Faux. Cette valeur est la *valeur de vérité* de la proposition.

Exemples :

1. « 3 est un multiple de 4 » est une proposition dont la valeur de vérité est Faux.
2. « Lima est la capitale du Pérou » est une proposition dont la valeur de vérité est Vrai.
3. « 1m90, c'est grand » n'est pas une proposition car…

Définition
Lorsque deux propositions ont la même valeur de vérité, on dit qu'elles sont *équivalentes*.

Remarque : démontrer p on peut tout aussi bien démontrer toute autre proposition qui est équivalente à p.

À partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en créer de nouvelles.
Par exemple « J'ai faim » **ET** « J'ai soif » qui est vraie si, et seulement si, « J'ai faim » est vraie et « J'ai soif » est vraie. **ET** est un *connecteur logique* appelé *conjonction* et noté $\wedge$ et défini par sa *table de vérité* :

p	q	$p \wedge q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

De façon analogue :

Définition
Soit p et q deux propositions.
- La négation de p est notée $\neg p$.
- La disjonction de p et q, p **OU** q est notée $p \vee q$.
- « p implique q » est notée $p \Longrightarrow q$.
- « p est équivalente à q » est notée $p \Longleftrightarrow q$.

Ces connecteurs logiques sont définis par leurs tables de vérité :

p	$\neg p$
Vrai	Faux
Faux	Vrai

p	q	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux	Vrai	Vrai

Remarque : il y a une subtilité sur les équivalences :
- on dit que p et q sont équivalentes lorsqu'elles ont la même valeur de vérité ;
- $p \iff q$ est une proposition.

$p \iff q$ est vraie si, et seulement si, les propositions p et q sont équivalentes, d'où l'abus de language (appeler cette proposition « p et q sont équivalentes »).

Méthode
Pour montrer que deux propositions sont équivalentes on peut montrer qu'elles ont même table de vérité.

Exercice
Soit p et q deux propositions. Montrer que $p \implies q$ est équivalente à $\neg p \vee q$.

Réponse
On dresse les tables de vérité :

p	q	$p \implies q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
Vrai	Vrai			
Vrai	Faux			
Faux	Vrai			
Faux	Faux			

Pour conclure, on observe que

Remarque : chaque ligne de la table de vérité correspond à un cas possible et tous les cas possibles sont envisagés. Lorsqu'on procède de la sorte, on parle de *disjonction des cas.*

Proposition
(Négation d'une conjonction, d'une disjonction)
Soit p et q deux propositions.

i. $\neg(p \vee q)$ est équivalente à $(\neg p) \wedge (\neg q)$.

ii. $\neg(p \wedge q)$ est équivalente à $(\neg p) \vee (\neg q)$.

Définition
Soit deux propositions p et q,
- la proposition $q \implies p$ est appelée la de $p \implies q$. (On peut aussi la noter $p \impliedby q$).
- la proposition $\neg q \implies \neg p$ est appelée la de $p \implies q$.

1.2 Quantificateurs

Définition
On appelle **prédicat** une propriété qui porte sur un (ou plusieurs) objet(s). Si P désigne le prédicat et x l'objet, on notera $P(x)$.

Exemples :

1. « est un nombre pair » est un prédicat. Si on le note P, $P(2)$ est vraie et $P(7)$ est faux.
2. « est un nombre plus grand que » est un prédicat à deux arguments. On pourrait le noter P et écrire $P(7, -3)$ pour dire que « 7 est plus grand que -3 » mais on préférera ...

Définition

Soit P un prédicat et E un ensemble.

— $\forall x \in E, \; P(x)$ est une nouvelle proposition qui signifie que **pour tout** objet x de l'ensemble E, la proposition $P(x)$ est vraie.

$\forall$ s'appelle **quantificateur universel**.

— $\exists x \in E, \; P(x)$ est une nouvelle proposition qui signifie que parmi les objets x de l'ensemble E, **il en existe (au moins) un** tel que la proposition $P(x)$ est vraie.

$\exists$ s'appelle **quantificateur existentiel**.

Exemple :

— $\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 \neq -1$ est vraie car le carré d'un réel est toujours positif et donc ne peut valoir -1 ;

— $\exists z \in \mathbb{C}, \; z^2 = -1$ est vraie car

Remarque : le lien entre $\forall$ et $\exists$ est profond. Quelle est la négation de la proposition « Tous les élèves de la TS1 ont eu le bac » ?

1.3 Notations usuelles en mathématiques, en physique, en sciences de l'ingénieur

Les lettres de l'alphabet grec sont abondamment utilisées, elles vous sont fournies dans un document annexe. De la même façon qu'on a l'habitude de noter x la variable réelle et z la variable complexe, certaines lettres grecques ont une signification usuelle :

— ε est utilisé pour une quantité petite (voire infinitésimale) ;

— θ et ϕ sont privilégiées pour des angles ;

— ρ sert pour des distances...

L'histoire de la construction des disciplines a donné lieu a plusieurs notations pour un même objet. Plusieurs exemples sont notables :

- En mathématique, i désigne le nombre imaginaire pur dont la partie imaginaire vaut 1. En sciences physiques i est reservée à l'intensité du courant électrique, on utilise donc la lettre j pour les complexes.

- En sciences physiques, la variable réelle la plus fréquemment utilisée est le temps que l'on représente par la lettre t ; les fonctions sont donc de la forme $f(t)$. Si on étudie l'abscisse d'un point mobile qui se déplace sur un axe, la fonction manipulée sera (naturellement) notée $x(t)$, ce qui peut prêter à confusion avec le cours de mathématiques où x désigne presque toujours la variable.

- La dérivation des fonctions se note de plusieurs façons, on donne ici les plus courantes. Pour une fonction f, sa dérivée sera notée f' ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (notation dite **différentielle**) ou encore $\dot{f}$ (cette notation est propre à la mécanique).

Si on dérive une seconde fois la fonction, on notera : ou ou

Attention : la notation $'$ est réservée aux fonctions qui ont un nom !
Si on veut dériver x^2+3, soit on utilise la notation différentielle et on écrit $\frac{\mathrm{d}(x^2+3)}{\mathrm{d}x}$, soit on la nomme pour utiliser le $'$ mais il est interdit d'écrire $(x^2+3)'$.

Remarque : certaines fonctions opèrent sur plusieurs variables. Par exemple, dans un circuit électrique, la loi d'Ohm $U = RI$ (avec U la tension en Volts, R la résistance en Ohms et I l'intensité en Ampères) peut se formuler en écrivant que U est une fonction des variables R et I.
Lorsqu'elle est dérivable, on peut dériver une fonction de plusieurs variables selon une ou plusieurs variables. La notation la plus courante est similaire à la notation différentielle, elle utilise un « d ronde » : ∂.

Exemple :

$$\frac{\partial(x^2y+2)}{\partial x} = \qquad ; \quad \frac{\partial(x^2y+2)}{\partial y} = \qquad ; \quad \frac{\partial^2(x^2y+2)}{\partial x \partial y} =$$

2 Nombres réels

2.1 Ensembles de nombres

Les nombres que nous manipulons appartiennent à différents ensembles :

— $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$;
— $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$;
— $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres que l'on peut écrire sous forme d'une fraction d'entiers ;
— $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, c'est-à-dire l'ensemble des abscisses qui existent sur une droite graduée ;
— $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme $a + \mathrm{i}b$ avec a et b des réels. Ceci se note :

$$\mathbb{C} = \Big\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\}$$

Il y a des relations d'inclusion entre ces ensembles :

2.2 Intervalles

Définition
On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de la droite réelle que l'on peut surligner sans lever le stylo.

Exemples : les intervalles sont de plusieurs sortes, certains intervalles particuliers ont une notation qui leur est propre :

- $[1;2]$ est un intervalle fermé borné, aussi appelé un **segment** ;

- $]-3;0[$ est un intervalle ouvert et borné ;

- Un intervalle semi-ouvert et borné :

- Un intervalle ouvert et non-borné :

- $\mathbb{R} =$

- $\mathbb{R}^* =$

- $= [0;+\infty[$

- $=]0;+\infty[$

Remarque : on a donné des définitions intuitives (par exemple : on a parlé de *bornes* sans préciser de quoi il s'agit). Ceci sera revu de façon plus rigoureuse dans un prochain chapitre.

De façon analogue aux intervalles de $\mathbb{R}$, il existe des intervalles d'entiers.

> **Définition**
> Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, avec $a \leq b$, $[\![a;b]\!]$ désigne

Exemple : $[\![-2;3]\!] =$

Remarque : un intervalle d'entier est l'**intersection** entre l'intervalle réel ayant les mêmes bornes et $\mathbb{Z}$. Par exemple, $[\![-2;3]\!] =$

2.3 Valeur absolue

> **Définition**
> Soit x un réel. La valeur absolue de x est le plus grand nombre entre x et son opposé $-x$.
> On la note $|x|$.
> $$|x| = \max(-x, x)$$

Exemples : $|7| =$; $|-5| =$; $|3-\pi| =$

Remarque : $|x|$ est la **distance** entre le point correspondant à x et l'origine sur la droite réelle.

> **Proposition**
> Soit x et y deux réels.
> La distance entre les points d'abscisses x et y sur la droite réelle est $|x-y|$.

2.4 Rappels sur les fractions, les racines et les puissances

Définition
Soit x un nombre réel non nul.
L'inverse de x est l'unique réel y qui vérifie $xy = 1$. On le note $\dfrac{1}{x}$

Définition
Soit x un réel et n un entier naturel non nul. On pose :

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}} \qquad \text{et, si } x \neq 0,\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

On décide également de poser $x^0 = 1$.

Remarque : une puissance qui n'est pas un entier relatif n'a donc aucun sens. Pour le moment.

Proposition
Soient x et y des réels, n et m des entiers relatifs. On a :

i. $(xy)^n =$

ii. $(x^n)^m =$

iii. $\dfrac{x^n}{x^m} =$

Méthode

— **Simplifier une fraction** c'est appliquer la règle :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{B}{C} \qquad \text{(avec } (A, B, C) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times C^*\text{)}$$

il faut toujours vérifier que le numérateur et le dénominateur sont factorisés par A.

— **Simplifier une racine carrée** c'est appliquer la règle :

$$\sqrt{AB} = \sqrt{A} \times \sqrt{B} \qquad \text{(avec } (A, B) \in (\mathbb{R}^+)^2\text{)}$$

Et, si $A = C^2$ (avec $C \geq 0$) alors $\sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{C^2} \times \sqrt{B} = C\sqrt{B}$.

Exercice
Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\pi(2e^{-7} + 4\sqrt{5}) - 6}{8\pi} \qquad ; \qquad B = \sqrt{252}$$

Réponse

$A =$

$B =$

2.5 Equations et inéquations

Définition
Résoudre une équation (ou une inéquation) c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'équation vraie.

Exemple : soit $x \in \mathbb{R}$; résoudre $\pi x - 7 = \dfrac{x+\sqrt{2}}{5}$.

Proposition

i. Lorsqu'on ajoute ou soustrait un complexe non nul à une équation, on obtient une équation équivalente.
ii. Lorsqu'on multiplie ou divise une équation par un complexe non nul, on obtient une équation équivalente.
iii. Lorsqu'on ajoute ou soustrait un réel non nul à une inéquation, on obtient une inéquation équivalente. **Le sens du symbole ne change pas.**
iv. Lorsqu'on multiplie ou divise une inéquation par un réel non nul, on obtient une inéquation équivalente. **Le sens du symbole ne change pas si le réel est positif ; on change le sens du symbole si le réel est négatif.**

Remarque :

Exercice
Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - x\ln\left(\dfrac{7}{8}\right) \leq \pi$.

Réponse
On a : $1 - x\ln\left(\dfrac{7}{8}\right) \leq \pi \iff$

3 Vecteurs du plan et de l'espace

3.1 Produit scalaire de deux vecteurs

Définition et calcul

Définition
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Proposition

Lorsqu'on travaille dans un repère **orthonormé** du plan ou de l'espace, on peut calculer simplement le produit scalaire à l'aide des coordonnées des vecteurs.

— Dans le plan :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

— Dans l'espace :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

Applications du produit scalaire

a) Tester l'orthogonalité (la perpendicularité) :

Proposition

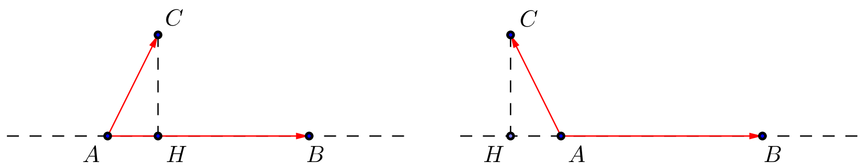
Deux vecteurs sont ortogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

b) Projeter un vecteur sur un axe :

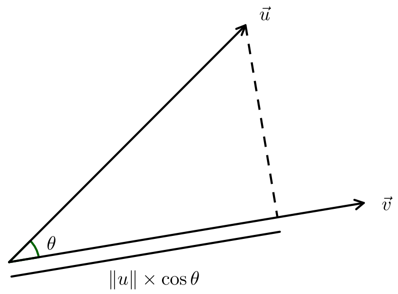
Proposition

Soient A, B, C trois points non alignés du plan et H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH$$



En pratique, on a deux cas suivant si l'angle formé par les vecteurs est aigu ou obtu :



c) À déterminer un angle :

Si on travaille dans un repère orthonormé, on sait calculer le produit scalaire ainsi que les normes des vecteurs. Si aucun vecteur n'est nul on a :

$$\cos\theta =$$

On utilise ensuite la fonction arccosinus pour avoir une approximation de θ *(on y reviendra)*.

3.2 Dans l'espace, produit vectoriel de deux vecteurs

Définition et calcul

Remarque : soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs otrhogonaux et de même norme dans l'espace. Il y a deux choix possibles pour un troisième vecteur $\vec{k}$ de même norme et qui soit orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Orienter l'espace, c'est choisir entre ces deux vecteurs et on dit que les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont dans le « sens direct » lorsqu'on peut les superposer, dans cet ordre, au pouce, à l'index et au majeur de la main droite.

Définition

On travaille dans l'espace orienté. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ qui vérifie :
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  - le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est orienté dans le sens direct
  - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$
- Si au moins un des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est défini comme le vecteur nul $\vec{0}$.

Proposition

On travaille dans un **repère orthonormé direct** de l'espace. On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_u \\ \\ y_u \\ \\ z_u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_v \\ \\ y_v \\ \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Applications du produit vectoriel

a) À tester la colinéarité, le parallélisme :

Proposition

Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si, et seulement si, leur produit vectoriel est nul.

b) À créer des vecteurs normaux, des bases directes :

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Alors :

- le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal au plan vectoriel défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- la famille de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de l'espace.