Calculs dans $\mathbb{C}$

Notations : dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Généralités sur les complexes

1.1 Forme algébrique

Définition

- On note i un nombre, non réel, qui vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
- On appelle **nombre complexe** les nombres de la forme $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b des réels. On dit alors que a est la **partie réelle** de z et que b est sa **partie imaginaire** ; on les note respectivement $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Pour un complexe z, l'écriture $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z)$ s'appelle la **forme algébrique de** z, cette écriture de z est unique.

Exemples :

Remarques :

a) **Attention :** une partie imaginaire est un nombre réel.

b) Il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$. $z \leq z'$ n'a de sens que si z et z' sont réels.

c) L'unicité de la forme algébrique signifie que, si z et z' sont deux complexes on a :

$$\big(z = z'\big) \iff \big(\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')\big)$$

Remarque : l'unicité de la forme algébrique signifie qu'il y a une correspondance bijective entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. On connait d'autres correspondances bijectives entre $\mathbb{R}^2$ et des ensembles : lesquelles ?

Définition

Soit z un complexe.

i. On dit que le point M du plan de coordonnées $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ est l'**image** de z dans le plan ; réciproquement, on dit que z est l'**affixe** du point M et on notera $M(z)$.

ii. De façon analogue, on dit que z est l'**affixe** du vecteur $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(z)) \end{pmatrix}$.

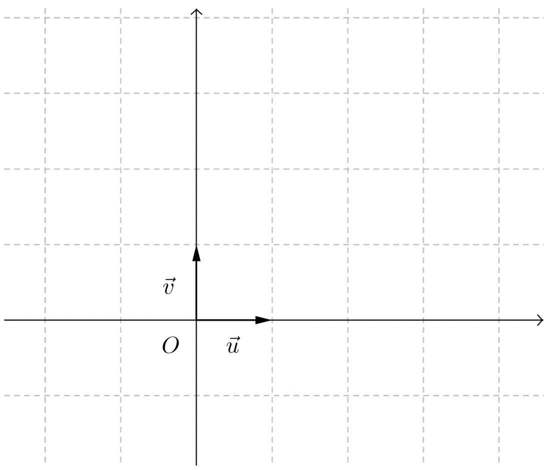
Exemples :

— Représenter les points $A(2 + 3\mathrm{i})$ et $B(3 - \mathrm{i})$.

— Que des dire des complexes dont l'image est sur l'axe des ordonnées ?

— Où sont situées les images des complexes réels ?

— Représenter $\Gamma = \{M(z) / \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$.



Remarque : le plan nous permet donc de représenter $\mathbb{C}$. On parle de **plan complexe**.

Définition

Soit z un complexe, $M(z)$ son image dans le plan complexe.

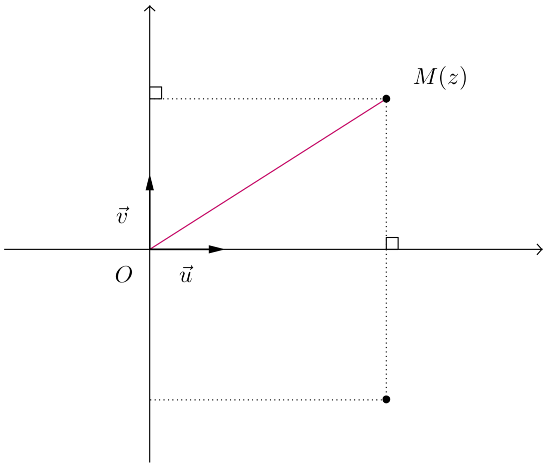
i. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

ii. Graphiquement, l'image de $\overline{z}$ dans le plan complexe est

iii. On appelle **module** de z, et on note $|z|$, la distance OM, c'est-à-dire la norme de $\overrightarrow{OM}$.

On a :

iv. Si $z \neq 0$, un **argument** de z désigne une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Remarque : pour un complexe non nul z, l'argument de z est donc défini à un multiple de 2π près (il en existe une infinité). Parmi les arguments de z, on appelle **argument principal** celui qui est dans $]-\pi;\pi]$, on le note $\text{Arg}(z)$.

Proposition

Soit z un complexe.

i. $|\overline{z}| = |z|$.

ii. Si $z \notin \mathbb{R}^-$, $\text{Arg}(\overline{z}) = -\text{Arg}(z)$.

Démonstration

Ces deux résultats sont une conséquence directe des définitions géométriques de la conjugaison, du module et de l'agument. Par exemple, pour i. :

Remarque : pour ii. on a du préciser $z \notin \mathbb{R}^-$ car

Exercice

Dans le plan complexe, représenter $\Lambda = \{M(z)/1 < |z| \leq 2\}$ et $\Pi = \{M(z)/\text{Arg}(z) \in [0; \frac{\pi}{6}]\}$.

1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Proposition

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ se prolongent *naturellement* à $\mathbb{C}$. Ainsi, pour tous complexes z et z', on a :

- $z + z' =$
- $zz' =$

Exemples :

1. $(3+2i)^2 =$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(3+i)z - 2i = 2iz$.

Proposition
Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. La distance AB vaut $|z_B - z_A|$.

Démonstration
soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.
Leurs affixes complexes respectives sont : $z_A =$ et $z_B =$

Les coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

On en déduit que l'affixe complexe de ce vecteur est :

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut donc :

Exercice
Dans le plan complexe, représenter $\Gamma = \{M(z) / |z + 2\mathrm{i} + 1| < 1\}$.

1.3 Propriétés du module et de l'argument

Proposition
Soit z un complexe. On a $z\overline{z} = |z|^2$.

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

Remarque : en particulier, pour tout complexe z, le nombre $z\overline{z}$ est un réel (positif). Cela permet de trouver la forme algébrique de l'inverse d'un complexe non nul, ou d'une fraction.

Méthode
Pour trouver la forme algébrique d'une fraction : on la multiplie et on la divise par le conjugué du dénominateur.

Exemple : Montrer que $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ est imaginaire pur.

Proposition
(Propriétés de la conjugaison).
Soit z et z' deux complexes. On a :

i. *(la conjugaison est compatible avec les sommes, les produits, les quotients)*

$$\overline{z+z'} = \qquad ; \qquad \overline{z \times z'} = \qquad \text{et, si } z' \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$$

ii. $\overline{\overline{z}} =$; $z + \overline{z} =$; $z - \overline{z} =$

Proposition
(Le module est compatible avec le produit et les quotients).
Soit z et z' deux complexes.

1. $|zz'| =$.
2. Si $z' \neq 0$, $|\frac{z}{z'}| =$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| =$.

Démonstration
On se limite à i., cette démonstration sera dans le programme de colles.

Proposition
(Le module n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction).
Soit z et z' deux complexes. On a :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \qquad \textbf{(Inégalité triangulaire)}$$

Démonstration
Soit z et z' deux complexes. On va raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned}
(\star)\ :\ |z+z'| \leq |z| + |z'| &\iff |z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2 && \text{(possible car} \qquad \text{)}\\
&\iff (z+z')\overline{(z+z')} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| \\
&\iff z\overline{z'} + \overline{z}z' \leq 2|z||z'|
\end{aligned}$$

Or, $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$ d'où : $(\star) \iff \mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z||z'|$.

On a $|z||z'| = |z||\overline{z'}| = |z\overline{z'}|$; la dernière inégalité devient $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z\overline{z'}|$ qui est toujours vraie.

Par équivalences, l'inégalité triangulaire est donc démontrée.

Remarques :

1. cette démonstration est exigible.
2. Le cas d'égalité se produit lorsque z et z' ont le même argument principal. Dans la démonstration, cela revient à avoir $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}|$ qui se produit si, et seulement si, $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$. Nous verrons dans un prochain chapitre sur les complexes que l'argument d'un produit est la somme des arguments et on pourra conclure.

2 Equations du second degré

2.1 Racines carrées complexes

Théorème
Soit a un nombre complexe non nul.
L'équation $z^2 = a$ admet exactement deux solutions complexes, qui sont opposées l'une de l'autre.

Remarque : les solutions sont appelées **racines carrées** de a. 0 a une seule racine carrée.

ATTENTION : Le symbole radical ($\sqrt{\ }$) est réservé pour les réels positifs..

Plutôt qu'une démonstration, on va prendre un exemple :

Remarque : en particulier, les nombres réels ont des racines carrées simples à trouver. Par exemple :

— les racines carrées de 7 :

— les racines carrées de -12 :

2.2 Résolution des équations du second degré

Théorème
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une ou deux solutions.
Plus précisément, en notant $\Delta = b^2 - 4ac$ et en prenant δ une racine carrée de Δ les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont :

Remarques :

a) tout complexe admet au moins une racine carrée, on a donc le droit d'en choisir une de Δ.

b) Si $\Delta = 0$ alors

Démonstration
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, notons $(E) : az^2 + bz + c = 0$. On a :

Remarque : dans le cas particulier où les coefficients sont réels alors

2.3 Somme et produit des racines

Proposition
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, soit z_1 et z_2 les solutions (éventuellement identiques) de $az^2+bz+c=0$.

On a : $z_1 + z_2 =$ et $z_1 z_2 =$

Proposition
Soit a et b des complexes. Les solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ xy=b \end{array} \right.$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ sont les racines (éventuellement égales) de $X^2 - aX + b$.

Démonstration
Cela provient du développement de $(X-x)(X-y) = X^2 - (x+y)X + xy$. ■

3 Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes

Définition
Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$.

i. On appelle **partie réelle** de f la fonction $\mathrm{Re}(f) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \right.$.

ii. On appelle **partie imaginaire** de f la fonction $\mathrm{Im}(f) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{Im}(f(x)) \end{array} \right.$.

iii. On dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ lorsque $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
On dit alors que la **dérivée** de f est la fonction $f' = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{iIm}(f)$.

Exercice
Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f(x) = (1+3i)\ln x - (1+i)x^5$.