Matrices

Du vocabulaire pour commencer

On appelle *structure algébrique* un ensemble muni d'opérations qui vérifient certaines caractéristiques. L'intérêt de l'étude de ces objet est que les propriétés qui sont démontrées sont relatives à la structure algébrique et non au contexte de l'ensemble en question. Par analogie, ce serait comme étudier les propriétés de tous les objets qui ont des roues : tout résultat s'appliquerait ensuite indifféremment aux voitures, aux motos, aux vélos, aux brouettes...

La seule structure algébrique dont l'étude soit au programme est celle d'*espace vectoriel*. Les autres (la plupart moins sophistiquées) apparaissent furtivement dans le vocabulaire que nous utiliserons. On va, en guise de vulgarisation, exposer l'idée qu'il faut se faire de ces structures.

- $\mathbb{Z}$ est stable par $+$, il y a un élément neutre (0), et chaque entier a un opposé : on dit que c'est un *groupe (additif)*.
- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont également des groupes additifs ; privés de 0 ce sont aussi des groupes multiplicatifs. Lorsqu'un ensemble possède ces deux qualités, on dit que c'est un *corps*.
- Un espace vectoriel est un ensemble stable par *combinaison linéaire*. Nous avons déjà croisé des exemples d'espaces vectoriels : les ensembles de fonctions (ensemble des fonctions définies sur un intervalle I, continues sur un intervalle I,...), les suites, les matrices. Pour faire une combinaison linéaire, on a besoin de deux types d'objets : les *vecteurs* (qui sont les éléments de l'ensemble en question) et les coefficients de la combinaison linéaire qu'on appelle *scalaires*, ils appartiennent au corps sur lequel on construit la structure d'espace vectoriel.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit le corps des scalaires. n, p et q désigneront des entiers naturels non nuls.

1 Opérations dans les ensembles de matrices

1.1 Combinaisons linéaires dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition

— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices ayant n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Une telle matrice est dite de taille (n,p) ou $n \times p$.

— Les éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont notés de la forme $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$.

— Certains cas particuliers disposent d'un vocabulaire spécifique : on parle de **matrice carrée** lorsque , de **matrice colonne** lorsque et de **matrice ligne** lorsque .

Exemples : une matrice ligne, une colonne et une matrice carrée :

Définition

Soit A et B deux matrices de même taille (n,p), λ un scalaire.

— $A+B$ est la matrice de taille (n,p) obtenue en additionnant les coefficients de A et B qui ont même position :

$$(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} + (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} = (a_{i,j}+b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$$

— λA est la matrice de taille (n,p) obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ :

$$\lambda(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} = (\lambda a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$$

Remarque : ayant défini l'addition ainsi que la multiplication par un scalaire, on peut faire des combinaisons linéaires dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, une combinaison linéaire de A et B est une matrice de taille $n \times p$ de la forme :

$$\lambda A + \mu B = \lambda(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} + \mu(b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} =$$

avec λ et μ qui désignent des scalaires.

Exemple : $3\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 3 & 0 \\ i & -7+\mathrm{i} & 5 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2+\mathrm{i} \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

Proposition

Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

i. l'addition des matrices est **commutative** :

ii. l'addition des matrices a un **élément neutre** :

iii. toute matrice A admet un **opposé** qui vaut

Remarques :

a) toutes les matrices qui interviennent dans les combinaisons linéaires (et donc dans les additions) ont une même taille $n \times p$ qui est fixée. En particulier, la notion de matrice nulle, souvent notée 0, correspond en fait à « la matrice nulle de taille (n, p) » ; on note $0_{n,p}$ si on veut éviter toute ambiguité.

b) $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc un groupe additif.

1.2 Produit de matrices

1.2.1 Retour sur le produit matrice $\times$ colonne

On sait déjà faire le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une colonne X. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5-i \\ 3+i & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \qquad =$$

Remarques :

a) X doit nécessairement être de taille

b) AX est alors une colonne qui est une combinaison linéaire des colonnes de A.

En effet, si $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \boxed{A_2} & \dots & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ alors on a $AX =$

1.2.2 Produit de deux matrices

Définition

Soit deux matrices : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

La matrice $C = A \times B$ est la matrice de taille (n, q)

dont les coefficients sont $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$

Exemples :

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

Remarque : le produit d'une ligne par une matrice est une ligne.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5-i \\ 3+i & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1+i & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

Remarques :

1. Le produit des matrices est **non-commutatif** : BA n'est pas nécessairement égal à AB. Pour des raisons de taille BA peut même ne pas exister.
2. On peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$
   On dit que la multiplication des matrices est **non-intègre**.
3. Si l'on considère les colonnes de B : $B = \left(\boxed{B_1} \ \boxed{B_2} \dots \boxed{B_q} \right)$ alors $AB =$
4. On peut raisonner de façon similaire sur les lignes : si $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} \\ \vdots \\ \boxed{A_n} \end{pmatrix}$ alors $AB =$

Le produit des matrices est donc contre-intuitif à plusieurs niveaux. Il y a quand même des propriétés calculatoires qui le rapprochent du produit de deux nombres :

Proposition

Soit A, B et C des matrices (dont les tailles permettent de réaliser les produits qui apparaissent dans la suite), λ et μ des scalaires.

i. Le produit des matrices est **bilinéaire** :

$(\lambda A + \mu B)C =$ et $A(\lambda B + \mu C) =$

ii. Le produit des matrices est **associatif** : $(AB)C =$

iii. La multiplication par une matrice nulle donne une matrice nulle.

Définition

On appelle **matrice identité de taille** n, notée I_n la matrice

Le **symbole de Kronecker** est l'application $\mathbb{N}^2 \to \{0; 1\}$ définie par $(i, j) \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, on le note $\delta_{i,j}$. Avec ce symbole, $I_n =$

Proposition
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$AI_p = \qquad\qquad \text{et} \qquad I_nA =$$

Démonstration
Il suffit de faire le calcul.

Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, le coefficient en position (i,j) de AI_p est $\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\delta_{k,j} = a_{i,j}$ et donc $AI_p = A$. De façon analogue, $I_nA = A$. ∎

Proposition
(Produit par blocs)
Soit A, B, C, D, E, F, G, H des matrices dont les tailles sont indiquées ci-dessous. On a :

Justification : envisager une matrice par blocs, c'est découper les plages d'indices en plusieurs morceaux. Lorsqu'on multiplie des matrices par blocs, il faut séparer les sommes selon les plages d'indices qui correspondent aux blocs.

Exemple :

1.3 Transposition

Définition
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ une matrice de taille $n \times p$.
On appelle **transposée de** A, notée ${}^tA$ (ou A^T), la matrice ${}^tA =$

Remarque : en conservant les notations de la définition, ${}^tA \in$

Exemples : ${}^t\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2+\mathrm{i} & \pi \end{pmatrix} =$; ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$

Remarque : la transposée d'une ligne est une colonne, la transposée d'une colonne est une ligne.

Proposition

i. La tranposition est *linéaire*, autrement dit :

ii. La transposition est *involutive*, autrement dit :

iii. Soit A et B des matrices telles que le produit AB existe. On a ${}^t(AB) =$

Démonstration
i. et ii. sont évidents. Démontrons iii.
Soit A et B des matrices telles que le produit AB existe ; le produit ${}^tB\,{}^tA$ existe alors aussi. Si on note $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{j,k})_{1\leq j\leq p, 1\leq k\leq q}$, pour $(i,k) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;q]\!]$, le coefficient de ${}^tB^tA$ en position (k,i) est le produit de la $k-$ème ligne de ${}^tB$ par la $i-$ème colonne de ${}^tA$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} b_{j,k}a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}$ soit le coefficient de AB en position (i,k). ■

2 Calcul dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2.1 Matrices particulières : triangulaires, diagonales, symétriques et antisymétriques

Définition
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est **diagonale** lorsque :
- On dit que A est **triangulaire supérieure** lorsque :
- On dit que A est **triangulaire inférieure** lorsque :
- On dit que A est **symétrique** lorsque :
- On dit que A est **antisymétrique** lorsque :

Exemples : une matrice diagonale : ; une matrice triangulaire supérieure :

une matrice symétrique : ; une matrice antisymétrique :

2.2 Produit de deux matrices carrées

Si A et B sont deux matrices, AB n'existe que si le nombre de lignes de B vaut le nombre de colonnes de A. Ce produit existe donc toujours dès lors que A et B sont des matrices carrées de même taille.
Autrement dit : $\boxed{\text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ on peut toujours calculer le produit de deux matrices}}$.

Proposition

i $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit :

ii I_n est l'**élément neutre** pour la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Démonstration
i. est une conséquence immédiate de la définition du produit matriciel. On a déjà vu ii. dans le cas plus général d'une matrice $n \times p$. ■

Définition
Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $r \in \mathbb{N}$. On définit les **puissances de** A par récurrence :

$$A^0 = \qquad \text{et} \qquad \forall r \in \mathbb{N},\ A^{r+1} =$$

- AB et BA existent mais sont le plus souvent différents. Lorsque $AB = BA$, on dit que A et B **commutent**.

La formule du binôme a été vue dans le cas des nombres (réels et complexes), elle fonctionne également dans le cas des matrices qui commutent :

Proposition
Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, et soit $r \in \mathbb{N}$. On a :

$$(A+B)^r =$$

Démonstration
En exercice (en faisant bien attention à quel moment il est important que A et B commutent). ■

Exemple : déterminons les puissances de $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On observe que $M = A + 2I_2$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A et $2I_2$ commutent (car I_2 commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a $A^0 = I_2$, $A^1 = A$ et pour $r \geq 2$, $A^r = 0$ (sous-entendu la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$). Il suit que, pour $r \geq 2$ on a :

$M^r =$

Proposition
Les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et triangulaires inférieures sont stables par produit. Autrement dit, pour des matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- si A et B sont diagonales alors AB est diagonale ;
- si A et B sont triangulaires supérieures alors AB est triangulaire supérieure ;
- si A et B sont triangulaires inférieures alors AB est triangulaire inférieure.

Démonstration
Pour le cas triangulaire supérieure :

2.3 Matrices inversibles

Remarque : qu'appelle-t-on l'*inverse* d'un nombre x ?

Définition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** lorsqu'il existe

Exemples :

a) La matrice nulle est-elle inversible ?

b) Prouver que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

Définition

On appelle **groupe linéaire** le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont inversibles. On le note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarques :

a) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas vide car

b) Dans l'introduction de ce chapitre, on a expliqué que l'idée qu'il faut se faire d'un groupe est celle d'un ensemble muni d'une opération tel qu'il existe un élément neutre et tel que chaque élément ait un inverse (ou un opposé, suivant qu'on appelle l'opération une multiplication ou une addition). $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour l'addition des matrices (l'élément neutre pour $+$ est la matrice nulle, chaque matrice a un opposé) ; mais pas pour le produit (il y a un élément neutre : I_n mais certaines matrices n'ont pas d'inverse). $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est la partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est un groupe pour le produit.

Proposition

i. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit. Autrement dit :

Si A et B sont des matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $(AB)^{-1} =$

ii. Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et si $r \in \mathbb{N}$ alors A^r est inversible et $(A^r)^{-1} =$

Démonstration

Il suffit de

2.4 Calcul d'inverse : cas particulier de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$

On a vu des propriétés de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ mais une question demeure en supsens : comment savoir si une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ? Ce problème est intimement lié à la résolution des systèmes linéaires ; ce sera l'objet de la fin du chapitre.

Le paragraphe qui suit traite le cas $n = 2$, on y note $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition
On appelle **déterminant** de M, noté $\det(M)$ ou encore $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ le nombre $ad - bc$.

Exemple : $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} =$

Proposition
M est inversible si, et seulement si

L'inverse de M est alors la matrice $M^{-1} =$

Démonstration
Calculons :

3 Retour sur les systèmes linéaires, application à la recherche d'inverse dans le cas général

3.1 Formulation matricielle des opérations sur les lignes

Définition
La **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille de matrices $(E_{i;j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ définie de la façon suivante : pour tout (i, j), $E_{i,j}$ est la matrice de taille $n \times p$ qui a un 1 en position (i, j), des 0 sinon.

Exemple : la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$:

Remarques :

a) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est constituée de matrices.

b) La notion de base sera vue au second semestre, une famille de vecteurs est une base lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice *(essayez de comprendre pourquoi $(E_{i,j})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)*.

Proposition
Soit $E_{i,j}$ une matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $A_1, \dots, A_n$ les lignes de A.

$$E_{i,j}A =$$

Illustration dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$:

Démonstration
Observons que $(10\dots0)A = A_1$, $(010\dots0) = A_2$, et ainsi de suite.
Ensuite, si la matrice B a pour lignes $B_1, \dots, B_n$ alors BA a pour lignes $B_1A, \dots, B_nA$. ■

Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dans la suite, i, j désignent des éléments de $[\![1;n]\!]$, λ un scalaire non nul.

Opération sur les lignes de A	Matrice par laquelle il faut multiplier A à gauche

Remarque : ces matrices s'appellent matrices de **permutation**, de **dilatation** et de **transvection**. On dit aussi que ce sont les **matrices élémentaires**.

Proposition
Une matrice élémentaire est inversible ; son inverse est aussi une matrice élémentaire.

Remarque : il s'agit d'une conséquence directe de

Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une matrice E qui est un produit de matrices élémentaires, ainsi qu'une unique matrice échelonnée réduite A' tel que $A = EA'$.

Démonstration
L'algorithme de Gauss fournit une suite finie de r opérations élémentaires sur les lignes qui aboutit à l'échelonnement et à la réduction de A en A' (l'unicité de A' est admise).
Du point de vue des opérations sur les matrices, cela revient à multiplier à gauche par des matrices élémentaires : $E_r \dots E_1 A = A'$.
Chaque matrice élémentaire est inversible, on a donc $A = E_1^{-1} \dots E_r^{-1} A'$. Le produit $E_1^{-1} \dots E_r^{-1}$ est un produit de matrices élémentaires, on a donc bien le résultat voulu. ■

Remarque : si on avait multiplié à droite et pas à gauche par des matrices élémentaires, on aurait obtenu des opérations sur les colonnes de A et pas sur les lignes. (Attention, si on multiplie à droite, les matrices ont pour taille $p \times p$). De façon analogue à l'équivalence sur les lignes, on définit l'équivalence sur les colonnes qu'on note $\underset{C}{\sim}$.

3.2 Critère d'inversibilité

Dans ce paragraphe, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on cherche à décider l'inversibilité ; X est une colonne de taille n. Toutes les colonnes qu'on considérera seront de taille n (on omettra de le préciser pour alléger les notations).

Lemme
Si A est inversible à droite, alors A est inversible ; autrement dit :

Démonstration
Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$. Il nous faut montrer que $BA = I_n$; raisonnons en deux étapes : prouvons qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $CA = I_n$ puis, $C = B$.

- Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Considérons l'équation $XA - \alpha I_n = 0_{n,n}$ d'inconnues X et α. Il s'agit d'un système linéaire de n^2 équations à $n^2 + 1$ inconnues. Ce système est homogène donc compatible, il a donc une infinité de solutions. Soit $(X_0; \alpha_0)$ une de ses solutions non triviales. Si on avait $\alpha_0 = 0$ alors on aurait $X_0 A = 0_{n,n}$. En multipliant à droite par B il viendrait $X_0 = 0_{n,n}$ ce qui est absurde car on a supposé que $(X_0; \alpha_0)$ est non triviale ; on a donc $\alpha_0 \neq 0$.
  On a : $X_0 A - \alpha_0 I_n = 0_{n,n} \iff X_0 A = \alpha_0 I_n \iff (\frac{1}{\alpha_0} X_0) A = I_n$.
  En prenant $C = \frac{1}{\alpha_0} X_0$ on a bien un inverse à gauche de A.
- Si $CA = I_n$ alors, en multipliant à droite par B on a : $CAB = B \iff C = B$.

Finalement, si $AB = I_n$ alors $BA = I_n$ et donc B est bien l'inverse de A. ■

Théorème
A est inversible si, et seulement si, $AX = B$ a une solution pour toute matrice colonne B.

Démonstration
On procède par double implication.

- Supposons que A soit inversible. Pour toute colonne B, $A^{-1}B$ est solution de $AX = B$.
- Réciproquement, supposons que $AX = B$ a une solution pour toute colonne B.
  On a donc une solution pour $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on l'appelle C_1 et on a $AC_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
  De façon analogue, soit C_2 une solution de $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On procède ainsi jusqu'à créer C_n et on considère la matrice B dont les colonnes sont $(C_1 C_2 \dots C_n)$.
  Les colonnes de $AB = A(C_1 \dots C_n)$ sont donc celles de I_n et donc B est l'inverse à droite de A. D'après le lemme, B est donc l'inverse de A qui est bien inversible.

On a un corollaire immédiat :

Théorème
A est inversible si, et seulement si, $\text{rg}(A) = n$.

Démonstration
D'après ce qui a été vu sur les systèmes linéaires, on sait que $\text{rg}(A) = n$ si et seulement si $AX = B$ a toujours (au moins) une solution. ■

Exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice

a) Donner un exemple de matrice inversible.

b) Donner un exemple de matrice non-inversible.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale soit inversible.

d) A quelle famille de matrices peut-on prolonger le résultat précédent ?

Le théorème suivant fait la synthèse des résultats précédents (et annonce des éléments qui seront développés au second semestre) :

Théorème
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. A est inversible.

ii. $A \underset{L}{\sim} I_n$.

iii. Pour toute colonne B, $AX = B$ admet au moins une solution.

iv. Pour toute colonne B, $AX = B$ admet une unique solution.

v. $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

Remarque : la plupart des équivalences du théorème ont déjà été prouvées dans les résultats précédents. Comprendre ce théorème, c'est comprendre le sens du rang dans un système carré compatible.

3.3 Déterminer l'inverse d'une matrice

Méthode
Pour déterminer l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- A est inversible si, et seulement si, pour toute colonne B, $AX = B$ admet une unique solution. Cette solution est alors $A^{-1}B$.
- Soit la matrice colonne $B = (b_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. Pour déterminer l'inverse de A on applique à la matrice augmentée $(A|B)$ les opérations élémentaires qui transforment A en A', sa matrice échelonnée réduit équivalente. on obtient $(A'|B')$. Il y a alors deux possibilités :
  — Si $A' = I_n$ alors A est inversible et $B' = A^{-1}B$ donc on obtient A^{-1} en lisant les coefficients du second membre ;
  — sinon, A n'est pas inversible.

Exemple : Appliquons la méthode d'inversion à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \qquad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 + b_2 \end{array}\right) \qquad (L_2 \leftrightarrow L_3)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 - b_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 + b_2 - b_3 \end{array}\right) \qquad (L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

$A \underset{L}{\sim} I_3$ donc A est inversible. De plus, $A^{-1}B = \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ b_3 \\ b_1 + b_2 - b_3 \end{pmatrix}$ donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut reformuler la méthode précédente, en mettant en avant les opérations élémentaires plutôt que la résolution d'un système :

Méthode
Pour décider si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et, le cas échéant déterminer son inverse :

1. On considère la matrice augmentée $(A|I_n)$;
2. On applique à cette matrice augmentée l'algorithme de Gauss qui échelonne et réduit A en A', on obtient alors : $(A'|E)$ et il y a deux possibilités :
   — si $A' \neq I_n$ alors A n'est pas inversible ;
   — si $A' = I_n$ alors E est l'inverse de A.

Remarque : E est le produit des matrices élémentaires qui a été introduit en fin de paragraphe 3.1.

Exercice
Appliquer la méthode précédente à la matrice A de l'exemple précédent.