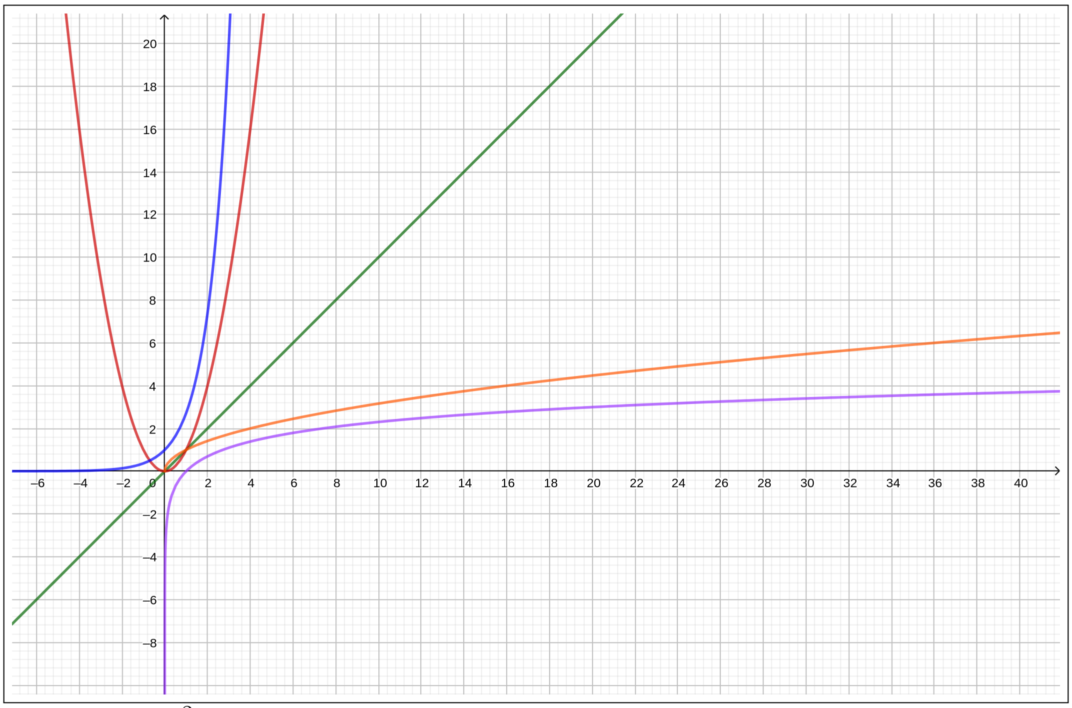
Analyse asymptotique

Introduction

Nous avons donné un sens précis aux limites, pour les suites et pour les fonctions. Ainsi, dire qu'une suite u tend vers $+\infty$ signifie :

Que dire de deux suites (ou deux fonctions) qui ont la même limite ? Tendent-elles vers cette limite commune « de façon analogue » ? Ou bien peut-on comparer leur comportement asymptotique ?
La réponse est oui, c'est ce que nous allons développer dans un premier temps.
Dans un second temps, nous allons comparer les comportements asymptotiques des suites et fonctions à ceux d'une famille de référence : les polynômes. Cela sera fait grâce à un nouvel outil : le développement limité.



exp, ln, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x$: toutes ces fonctions ont la même limite en $+\infty$.

1 Relations de comparaisons asymptotiques : cas des suites

Remarque : pour une suite de réels, le seul comportement asymptotique à étudier est pour $n \to +\infty$; de ce point de vue, les suites sont plus simples que les fonctions.
Comparer le comportement asymptotique de deux suites c'est les comparer pour « $n \to +\infty$ » et donc pas sur leurs *premiers termes*.

1.1 Domination, négligeabilité

Définition
Soient u et v deux suites, avec v qui ne s'annule jamais à-partir d'un certain rang.

i. On dit que u est **dominée** par v lorsque $\dfrac{u}{v}$ est bornée (à partir d'un certain rang), autrement dit :

On note alors $u_n = O(v_n)$ (et on dit "grand O").

ii. On dit que u est **négligeable** devant v lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$ (on dit "petit o"), ou bien $u_n \ll v_n$.

Exemples :

a) Prouver que $(3n^4 - n^2 + 2n + 1)_{n\in\mathbb{N}} = O(n^4)$.

b) Prouver que $(n^2 - 4n)_{n\in\mathbb{N}} = o(n^5)$.

Remarque : on a déjà utilisé la domination, lors de

Les deux propositions qui suivent sont des conséquences directes des définitions et des opérations sur les limites.

Proposition

(Lien entre négligeabilité et domination)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites.

i. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
ii. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
iii. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
iv. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
v. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.

Exemple : $\sin n = o(n)$ et $n = o(n^2)$ donc $\sin n = o(n^2)$

Proposition

(Négligeabilité et domination : comportement lorsqu'on fait des opérations)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.
ii. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
iii. On peut remplacer tous les o par des O dans les propositions précédentes.

Remarque : la formulation a été privilégiée avec la négilgeabilité qui est plus utilisée que la domination.

Proposition

Les comparaisons des fonctions usuelles donnent les relations suivantes :

i. $\forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln^\beta n = o(n^\alpha)$
ii. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall a > 1,\ n^\alpha = o(a^n)$
iii. $\forall a \in \mathbb{R},\ a^n = o(n!)$.

Démonstration

— Commençons par prouver que $\ln n = o(n)$:

On a, $\forall n \geq 1,\ \ln n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_1^n = 2(\sqrt{n}-1) \leq 2\sqrt{n}$.

Il suit que $\forall n \geq 1,\ 0 \leq \dfrac{\ln n}{n} \leq \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ soit $\ln n = o(n)$.

— Montrons à présent que $\forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln^\beta n = o(n^\alpha)$.

Soit $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \forall n \geq 1,\ \dfrac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = \left(\dfrac{\ln n}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\dfrac{\frac{\beta}{\alpha}\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\beta\left(\dfrac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$.

Or, en vertu du point précédent et par composition, $\dfrac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a donc bien prouvé i. $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$.

— Prouvons ii. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $a > 1$.

On a, pour $n \geq 1$, $\dfrac{n^\alpha}{a^n} = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha\ln n}}{\mathrm{e}^{n\ln a}} = \exp\left(\alpha\ln n - n\ln a\right) = \exp\left(n(\alpha\dfrac{\ln n}{n} - \ln a)\right)$.

On a $a > 1$ donc $\ln a > 0$ puis $n(\alpha\frac{\ln n}{n} - \ln a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

En composant avec exp on obtient bien que $n^\alpha = o(a^n)$.

— Prouvons iii. $\forall a \in \mathbb{R},\ a^n = o(n!)$.

Pour $a = 0$, le résultat est évident. Ensuite, on observe que, $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $a^n = O(|a|^n)$ et donc il suffit de montrer iii. pour $a > 0$.

Soit $n_0 = \lfloor a \rfloor$. On a, pour $n \geq n_0$: $\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a^{n_0}}{n_0!} \times \underbrace{\dfrac{a}{n_0+1} \times \cdots \times \dfrac{a}{n}}_{n-n_0 \text{ facteurs}} \leq \dfrac{a^{n_0}}{n_0!} \times \left(\dfrac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0}$.

Or, $0 < \frac{a}{n_0+1} < 1$ donc $\left(\frac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on a bien $a^n = o(n!)$.

Remarques :

- dans ii. et iii. on peut prendre $a = \mathrm{e}$ et on obtient e^n.
- il faut se souvenir que :

$$\boxed{\text{logarithmes} \quad << \quad \text{polynômes} \quad << \quad \text{exponentielles} \quad << \quad \text{factorielle}}$$

1.2 Equivalence

Définition

Soit u et v deux suites avec v qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

On dit que u est **équivalent** à v lorsque $\lim \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$; on note alors $u_n \sim v_n$.

Remarque : la proposition qui suit justifie le vocabulaire employé.

Proposition

La relation $\sim$ entre deux suites (qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang) est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est :

-
-
-

Exemples : $n^2 + 3n + 1 \sim$ et $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

En effet, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ car

Proposition

(Lien entre équivalents et limites)

Soit u et v deux suites telles que $u_n \sim v_n$.

— Si u n'a pas de limite alors

— Si u admet une limite alors

Remarque : si u et v ont la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ a-t-on $u_n \sim v_n$?

Proposition

Soit u et v deux suites. On a équivalence entre les relations $u_n \sim v_n$ et $u_n = v_n + o(v_n)$.

Démonstration

$$u_n \sim v_n \iff \lim_n \frac{u_n}{v_n} = 1 \iff \lim_n \frac{u_n - v_n}{v_n} = 0 \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff u_n = v_n + o(v_n)$$

Remarque :

a) la proposition précédente est fondamentale, elle annonce que l'équivalence est « l'égalité à un petit o près » ; cela sera central dans l'étude des développements limités.

b) Lorsqu'on travaille avec une somme, on veillera à conserver uniquement le terme significatif. Par exemple, on a $e^n + n^2 + 1 \sim e^n + n^2 \sim e^n + 1$ mais la seule équivalence vraiment pertinente ici est $e^n + n^2 + 1 \sim$

Théorème

L'équivalence est compatible avec le produit, le quotient, les puissances.

Autrement dit, si u, v et w sont des suites telles que $u_n \sim v_n$ alors :

$$u_n \times w_n \sim v_n \times w_n \quad ; \quad \frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{w_n} \quad ; \quad \frac{w_n}{u_n} \sim \frac{w_n}{v_n} \quad ; \quad u_n^\alpha \sim v_n^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Remarques :

a) pour alleger l'énoncé du théorème précédent, on a omis de demander que les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang pour assurer l'existence des quotients.

b) Ces propriétés se démontrent simplement en revenant aux définitions, par exemple :

Méthode
Pour déterminer une limite en utilisant des équivalents :

1. on travaille par produit, quotient, puissances sur les équivalents pour simplifier l'expression à étudier ;
2. les « petits o » disparaissent ;
3. lorsque l'expression a une limite simple à déterminer, on s'arrête.

Exemples :

a) $\dfrac{3n^2+\cos n}{(5n-1)^2} \sim \dfrac{3n^2}{(5n)^2} \sim \dfrac{3n^2}{25n^2} \sim \dfrac{3}{25}$ donc $\dfrac{3n^2+\cos n}{(5n-1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{25}$.

b) $n\sin^2\dfrac{1}{n} \sim n\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \sim n\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}$; on en déduit $n\sin^2\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque : on voit bien, avec ce dernier exemple, que la notion d'équivalent est plus forte que celle de limite : on a plus d'information en sachant $n\sin^2\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ qu'en sachant $n\sin^2\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

ATTENTION : avec les équivalents, il faut se méfier des sommes et des différences.

Exemple : $\mathrm{e}^n + n^2 \sim \mathrm{e}^n + n^2$ et $\mathrm{e}^n + n^2 \sim \mathrm{e}^n$ la différence donnerait $0 \sim n^2$!

2 Relations de comparaisons : cas des fonctions

Nous allons adapter aux fonctions ce qui a été vu pour les suites. La différence notable est qu'on va travailler pour des limites en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dans le cas de deux suites, une comparaison asymptotique se passe nécessairement pour $n \to +\infty$ (on peut écrire $u_n = o(v_n)$ sans préciser « pour $n \to +\infty$ ») ; pour les fonctions, il faudra systématiquement indiquer dans quel voisinage on travaille.

Tous les résultats vus pour les suites demeurent vrais dans le cas des fonctions ; on se limitera dans ce paragraphe à donner ceux qui sont les plus utiles.

Dans la suite, a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Sauf mention contraire, les fonctions considérées seront définies au voisinage de a (sauf, peut-être, en a), et ne s'annuleront pas au voisinage de a (sauf, peut-être, en a). V_a désignera un voisinage de a (peut-être privé de a).

Définition
Soit f, g deux fonctions. On dit que :

- g domine f en a lorsqu'il existe un voisinage de a sur lequel $\frac{f}{g}$ est bornée.
  On note alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
- f est négligeable devant g en a lorsque
- f est équivalente à g en a lorsque

Exemple : soit deux entiers naturels $n < p$. Compléter les puissances de x avec n et p :

$$x \quad \underset{0}{=} o(x \quad) \qquad \text{et} \qquad x \quad \underset{+\infty}{=} o(x \quad)$$

En effet,

Définition

(définition alternative de la négligeabilité)

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon(x)$ définie sur un voisinage V_a de a telle qu'on ait :

- $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$;
- $\forall x \in V_a, \; f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Remarques :

a) On avait déjà introduit ce type de notation

b) Sur le même modèle de faire apparaitre une nouvelle fonction, on pourrait formuler des définitions alternatives pour la domination et la négligeabilité.

Proposition

(Lien entre les relations)

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ alors
- $f \underset{a}{\sim} g$ si, et seulement si, $f - g \underset{a}{=} o(g)$

Proposition

(Opérations avec les relations)

Soit des fonctions f, g, h, k ; deux réels λ et μ.

- Domination et la négligeabilité (on écrit uniquement pour o) :
  i. Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $\lambda f + \mu g \underset{a}{=} \quad$.
  ii. Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(k)$ alors $fg \underset{a}{=} \quad$.
- Équivalence :
  i. L'équivalence n'est pas compatible avec la somme (en général).
  ii. Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$ alors $fg \underset{a}{\sim} \quad$.
  iii. Si $f \underset{a}{\sim} h$ alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim}$

Remarque : Pour les équivalences, iii. et ii. permettent de déduire que

Par ailleurs, en raisonnant par récurrence avec ii. on obtient :

Proposition
(Substitution dans les équivalents)
Soit f, g telles que $f \underset{a}{\sim} g$ et φ est une fonction définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\varphi(x) \underset{x \to b}{\to} a$.
On a :

Démonstration
C'est une conséquence de la composition des limites :
$\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f \circ \varphi}{g \circ \varphi}(x) = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f}{g}(\varphi(x)) = \lim\limits_{t \to a} \dfrac{f}{g}(t) = 1.$ ■

Remarque : on a volontairement omis le mot *composition* de l'énoncé (qui a été remplacé par *substitution*) car on ne peut composer les équivalents qu'à droite.

Méthode
À mémoriser : les équivalents sont compatibles avec le produit, le quotient, la substitution ; il est interdit d'additionner et soustraire des équivalents ; on ne compose pas les équivalents (en général).

Théorème
(Equivalents classiques)

1. Polynômes : soit P est un polynôme de degré n, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_{n-r} x^{n-r}$.

   $P(x) \underset{0}{\sim}$; $P(x) \underset{+\infty}{\sim}$; $P(x) \underset{-\infty}{\sim}$

2. Fonctions trigonométriques : $\sin x \underset{0}{\sim}$ et $\cos x \underset{0}{\sim}$

3. Exponentielle et logarithme : $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim}$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$

3 Développements limités

Dans tout ce chapitre, a désigne un réel et f une fonction définie sur voisinage de a (on verra sur des exemples que f peut être définie sur un voisinage de a privé de a). L'objet des développements limités est d'approcher la fonction f par un polynôme au voisinage de a. En particulier, les développements limités vont donc nous fournir des équivalents polynomiaux.

3.1 Généralités

3.1.1 Définition, premiers développements limités

Définition
Soit $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie au voisinage du réel a.
On dit que f admet un **développement limité d'ordre** n **en** a s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, sur un voisinage de a, on ait :

$$f(x) = f(a+h) = P(h) + R(h) \quad \text{avec } R(h) \underset{h \to 0}{=} o(h^n)$$

Le polynôme $P(h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n$ est appelé **partie régulière** du développement limité.

Remarques :

- on note $DL_n(a)$ pour "développement limité d'ordre n en a".
- La notion de négligeabilité est une notion locale : il faudra systématiquement préciser de quel voisinage il s'agit (souvent $h \to 0$).
- Le changement de variable $x = a + h$ n'est pas obligatoire mais il facilite la lisibilité. Tous les énoncés peuvent se reformuler avec x, c'est-à-dire en remplaçant les h par $x - a$.

Exemples :

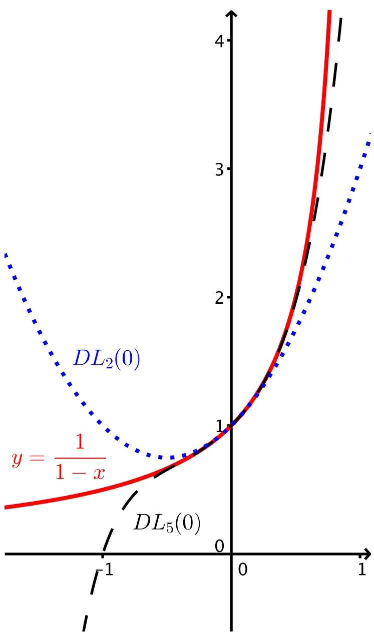
a) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ au voisinage de $a = 1$

Remarque : cet exemple est un peu idiot ! En effet, pour approcher un polynôme f par un polynôme P il suffit de prendre $P = f$! Néanmoins, on peut remarquer que si l'on veut un développement limité à un ordre inférieur, il suffit de **tronquer** le développement limité, ce qui est une règle générale (que l'on verra un peu plus loin).

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ au voisinage de $a = 0$

- A l'ordre 2 : prouver que $f(h) \underset{x \to 0}{=} 1 + h + h^2 + o(h^2)$

- A l'ordre n :



Remarque : si la partie régulière du DL a ses coefficients d'ordres les plus faibles nuls, c'est-à-dire si elle est de la forme $P(h) = b_k h^k + b_{k+1} h^{k+1} + \cdots + b_n h^n$, alors on l'écrit sous la forme dite **normalisée** :

$$P(h) = h^k (b_k + b_{k+1} h + \cdots + b_n h^{n-k})$$

3.1.2 Plusieurs développements limités d'ordres différents : quel intérêt ?

Travaillons sur un exemple : on a vu $\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.
Quelle différence entre ces deux développements limités ? Lequel est le *meilleur* ?

Les $o(x^n)$ correspondent à l'erreur commise. Par analogie avec l'approximation décimale, c'est comme si on disait $\pi \simeq 3,1$ (à 0,1 près) et $\pi \simeq 3,14$ (à 0,01 près) .

Lorsqu'on écrit $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+o(x^2)$ on donne plus d'informations qu'avec $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$.
En effet, $\frac{x^2+o(x^2)}{x} = x + x\frac{o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $x^2+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

Pour reprendre l'analogie avec l'écriture décimale, il y aurait quelque chose de paradoxal à écrire $\pi \simeq 3,14159$ à $0,1$ près. En effet, si on annonce une précision à 10^{-1}, quel portée donner à des décimales plus précises ? On a $\pi \simeq 3,199999$ à $0,1$ près !
De façon analogue, s'il est vrai que $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+o(x)$ on a aussi $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+5x^2+o(x)$!

Les propriétés qui ont été vues sur cet exemple sont vraies de façon générale :

Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in [\![1;n-1]\!]$ on a :

i. $x^n \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ ii. un $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ est un $\underset{x\to 0}{o}(x^p)$

En conséquence,

Proposition
Si f admet un $DL_n(a)$ alors, pour tout $p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$ obtenu par **troncature**, c'est-à-dire en supprimant tous les termes de degré supérieurs à $p+1$ (qui se retrouvent englobés dans le reste).

3.2 Formule de Taylor-Young, développements limités de référence

Théorème
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(x) = f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \ + \ o(h^n)$$

Exemples : donner les $DL_n(0)$ des fonctions suivantes.

a) $e^x \underset{x\to 0}{=}$

b) $\cos x \underset{x\to 0}{=}$

c) $\sin x \underset{x\to 0}{=}$

d) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=}$

e) $(1+x)^\alpha \underset{h\to 0}{=}$

f) $\text{Arctan } x \underset{x\to 0}{=}$

Remarques :
— ces développements limités sont à connaître par coeur ! On va voir qu'ils permettent, par opérations, de trouver beaucoup d'autres DL.
— La formule de Taylor-Young sera prouvée au second semestre, lors du chapitre d'intégration.

3.3 Propriétés des développements limités

3.3.1 Premières propriétés

Proposition
Il y a **unicité** du développement limité : si f admet un $DL_n(a)$ alors ce développement est unique.

Démonstration
Par l'absurde. Supposons $f(x) = f(a+h) \underset{h\to 0}{=} b_0 + b_1 h + \cdots + b_p h^p + b_{p+1} h^{p+1} + \cdots + b_n h^n + o(h^n)$

■

Proposition
(Développements limités en 0 *et parité.)*
Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière P.

- si f est paire alors P n'a que des monômes de puissances paires
- si f est impaire alors P n'a que des monômes de puissances impaires

Exemple : les DL_n de cos et sin en 0 n'ont que des monômes pairs et impairs réspectivement.

Attention : ce n'est valable QUE pour les développements en 0 !

3.3.2 Opérations sur les développements limités

Proposition
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si les fonctions f et g admettent des $DL_n(a)$ alors $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ admettent aussi des $DL_n(a)$.
Plus précisément si $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} P_f(h) + o(h^n)$ et $g(a+h) \underset{h\to 0}{=} P_g(h) + o(h^n)$ alors :

- la partie régulière du $DL_n(a)$ de $\lambda f + \mu g$ est
- la partie régulière du $DL_n(a)$ de $f \times g$ est

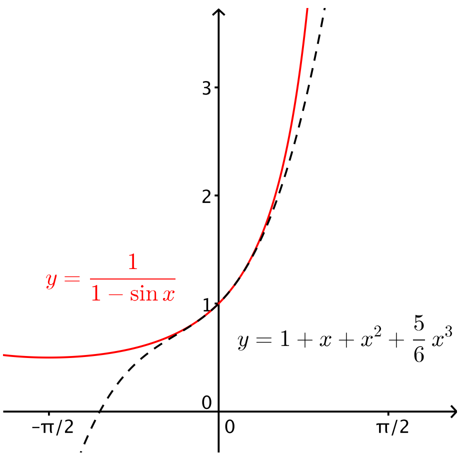
Exemples :

1. Donner un $DL_4(0)$ de ch
2. Donner un $DL_3(0)$ de $f(x) = \sin x \cos x$

Remarque : on peut gratuitement gagner un ordre sur ce dernier exemple... comment ?

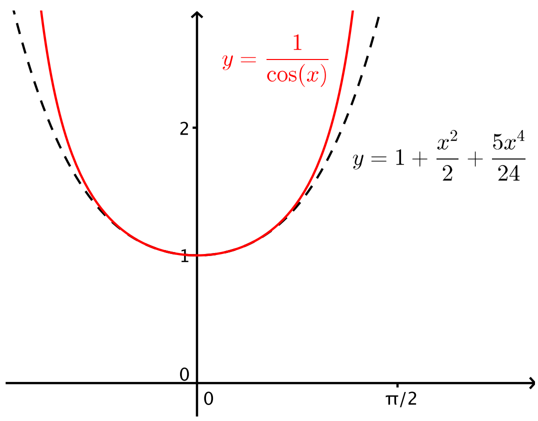
Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}$, f et g deux fonctions.
Si f admet un $DL_n(0)$ et g un $DL_n(f(0))$ alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$.
Plus précisément, si P_f et P_g sont les parties régulières des développements de f et g alors le développement de $g \circ f$ a pour partie régulière la troncature de $P_g \circ P_f$ au degré n.

Exemple : déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$



Méthode
Pour calculer le développement limité d'un quotient : on se sert de la composition et du DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Exemple : déterminer le $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{1}{\cos x}$



Exercice
Déterminer le $DL_3(0)$ de tan. **(DL de référence, à connaître)**

3.3.3 Développement d'une primitive, de la dérivée

Proposition
Soit f une fonction et F une primitive de f. Si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière P alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ de partie régulière $F(0) + \int P$.

Remarque : on a noté $\int P$ la primitive de P dont le coefficient constant est 0.

Exemple : rappeler le $DL_4(0)$ de $\frac{1}{1-x}$ puis en déduire le $DL_5(0)$ de $\ln(1-x)$.

Proposition
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors f et f' admettent des DL d'ordres respectifs $n+1$ et n en a.
De plus, le DL_n de f' s'obtient en dérivant terme-à-terme le DL_{n+1} de f.

Remarque : l'existence des DL est assurée par

Exemple : rappeler le $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$ puis en déduire celui de $\frac{1}{1+x}$.

3.4 Applications

3.4.1 Etude locale d'une fonction

La formule de Taylor Young permet d'avoir un DL_n pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. La réciproque est-elle vraie ? Si f admet un DL_n alors f est-elle nécessairement de classe $\mathcal{C}^n$?

Proposition
Si f est définie en a :

i. si f admet un $DL_0(a)$: $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} b_0 + o(1)$ alors f est continue en a et $f(a) = b_0$;

ii. si f admet un $DL_1(a)$: $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} b_0 + b_1 h + o(h)$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = b_1$;

iii. **ATTENTION :** si f admet un $DL_n(a)$ avec $n > 1$ alors on ne peut pas conclure que f est n fois dérivable en a.

Exemple : la fonction $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ vérifie $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$. Elle admet donc un $DL_2(0)$ (de partie régulière nulle), elle n'est pourtant pas deux fois dérivable en 0.

Remarque : dans la proposition précédente, si f n'est pas définie en a, l'existence d'un DL_0 en a permet de prolonger f par continuité en a ; l'existence d'un DL_1 assure que le prolongement obtenu est dérivable en a.

Exercice
Prouver que $f(x) = \frac{\cos x - e^x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable en 0 et déterminer une équation de sa tangente. Précisez les positions relatives de cette tangente par rapport à $\mathcal{C}_f$.

Proposition
Si f admet un DL d'ordre au moins 2 en a : $f(x) \underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + b_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $b_p \neq 0$ alors la courbe de f admet pour tangente au point d'abscisse a la droite T_a d'équation $y = b_0 + b_1(x-a)$.
De plus, au voisinage de a, les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de T au point d'abscisse a sont déterminées par le signe de $b_p(x-a)^p$.

3.4.2 Etude au voisinage de l'infini

Définition
Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle $]M;+\infty[$), $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On dit que la droite $y = ax+b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

Remarques :

- Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ et $y = ax+b$ vont devenir très proches au voisinage de $+\infty$.
- Si $a = 0$ on parle d'*asymptote horizontale*, sinon d'*asymptote oblique*.
- La définition s'adapte simplement pour une asymptote en $-\infty$.

Méthode
Pour étudier une fonction au voisinage de $+\infty$: on pose $x = \frac{1}{h}$ et on fait un développement limité pour $h \to 0$.

Exercice
On considère, pour $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x^2+x}$.

a) Justifier que f est définie au voisinage de $+\infty$.

b) Prouver que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

c) En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

d) Précisez les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote.