Espaces vectoriels de dimension finie

1 Définition et exemples de référence

Définition
On dit que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie de E. Dans le cas contraire, E est dit de **dimension infinie**.

Exemples :

a) L'ensemble des vecteurs du plan est de dimension finie puisque

b)

c)

d) $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. En effet,

e) Un autre exemple d'espace de dimension infinie :

2 Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème
(dit « de la base extraite »)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non-réduit au vecteur nul.
De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

Démonstration

■

Ce théorème a une conséquence fondamentale :

Tout espace vectoriel de dimension finie

Proposition
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{F}$ une famille génératrice finie de E.
Alors, $\#\mathcal{F}$ est une borne supérieure pour le cardinal des familles libres de E.

Autrement dit :

Démonstration

$\blacksquare$

Théorème
(dit « de la base incomplète »)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non-réduit au vecteur nul.
Toute famille libre $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ de E peut-être complétée en une base de E.

Exemples :

a) On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère $\vec{u} = (1, 2, 0)$ et $\vec{v} = (-3, 4, 0)$.
   - $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre car
   - $(\vec{u}, \vec{v}, (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, d'une part il est clair que c'est une famille libre.
     D'autre part $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont dans $\mathrm{Vect}((\vec{u}, \vec{v}))$ car

     Donc $\mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \subset \mathrm{Vect}((\vec{u}, \vec{v}))$.
     L'inclusion réciproque est évidente (puisque

     donc $\mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \mathrm{Vect}((\vec{u}, \vec{v}))$.
     Il suit que $(\vec{u}, \vec{v}, (0, 0, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

b) $(X^2 + X + 1, X^2 - X + 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
   On peut la compléter en une base en lui ajoutant le polynôme X^2.

Exercice
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (A, B, C) est une famille libre.
2. Compléter (A, B, C) en une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3 Dimension d'un espace vectoriel

Définition
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul. Alors :
- toutes les bases de E ont le même cardinal;
- ce cardinal commun est appelé la **dimension** de l'espace vectoriel.
- On note $\dim(E)$ la dimension de E et on pose $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Démonstration
Il faut démontrer que

■

Méthode
Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il faut

Exemples :

a) $\dim(\mathbb{K}^3) =$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dim \mathbb{K}^n =$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \dim \mathbb{K}_n[X] =$

d) $E = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ (x^2+1)y' + 3y = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension

e) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 (une **droite vectorielle**) : une de ses bases est

f) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 (un **plan vectoriel**) : une de ses bases est

Proposition
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors :

- toute famille de m vecteurs avec $m > n$ est
- toute famille de p vecteurs avec $p < n$ n'est pas
- toute famille libre de n vecteurs est
- toute famille génératrice de n vecteurs est

Méthode
Pour construire une base d'un espace vectoriel E de dimension n :

- il faut trouver une famille libre **ou** génératrice de n vecteurs.
- Si on a une famille génératrice, on retire des vecteurs jusqu'à en avoir n en veillant à ce que la famille demeure génératrice.
- Si on a une famille libre, on ajoute des vecteurs jusqu'à en avoir n en veillant à ce que la famille demeure libre.

Exemple : dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $P = X^2 + X + 1$, $Q = X^3 + X$ et $R = 3X + 2$.

a) (P, Q, R) est libre car

b) (P, Q, R) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$ car

c) (P, Q, R, S) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec $S =$

Remarque : il y avait d'autres possibilités pour S ! Par exemple $S = X^3$.*(Exercice)*

4 Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

- Alors F est
- De plus, $\dim(F)$

Méthode
Pour montrer que deux sous-espaces F et G sont égaux, il suffit de prouver une inclusion ($F \subset G$ ou $G \subset F$) **et** $\dim(F) = \dim(G)$.

Théorème
(Formule de Grassman)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors les sous-espaces vectoriels $F + G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie, et on a :

Remarque : pour mémoire, $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

5 Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $E = F \oplus G$.
ii. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.
iii. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $E = F + G$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous espaces :

$$F = \{(x, y, z)/3x + 2y - z = 0\} \quad ; \quad G = \{(x, y, z)/x - 5y + 2z = 0\} \quad ; \quad H = \mathrm{Vect}(1, 0, 2)$$

a) F et G ne sont pas supplémentaires car

b) $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$ car

Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E admet un sous-espace vectoriel supplémentaire G.
De plus :

$$\dim(G) =$$

Remarque : lorsque $F \neq E$ il y a une infinité de supplémentaires. Par exemple, dans le plan, une droite vectorielle admet n'importe quelle autre droite vectorielle (non confondue) comme supplémentaire.

Démonstration

■

Définition
Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs, dans un espace vectoriel E (qui lui, n'est pas nécessairement de dimension finie).
On appelle **rang** de $\mathcal{F}$ la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.