Equations Différentielles Linéaires du Second Ordre à coefficients constants

Objectif :

avec a et b des nombres réels, $f : I_{\text{intervalle}} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

1 Résolution de l'équation homogène

Définition
On appelle *équation caractéristique* associée à (E) l'équation du second degré $(E_c) : r^2 + ar + b = 0$

Exemples :

.

Equation différentielle	Equation caractéristique
$y'' + 4y' - 5y = e^x$	
$y'' - 3y' = t^2 + 1$	
	$r^2 - 6r + 7 = 0$

Théorème
Soit $(E_h) : y'' + ay' + by = 0$ l'équation homogène associée à (E) et $(E_c) : r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique.

- Si E_c a **deux racines réelles** r_1 et r_2 alors $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ sont solutions de (E_h) et l'ensemble des solutions de E_h est :

- Si E_c a **une racine double** r alors $x \mapsto e^{rx}$ et $x \mapsto xe^{rx}$ sont solutions de (E_h) et l'ensemble des solutions de E_h est :

- Si E_c a **deux racines complexes conjuguées** $r_1 = \alpha + i\beta$ et $\overline{r_1} = \alpha - i\beta$ alors $x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ sont solutions de (E_h) et l'ensemble des solutions de E_h est :

Exemples : Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes.

a) $(E_1) : y'' + 3y' + 2y = 0$

b) $(E_2) : y'' - 2y' + 1y = 0$

c) $(E_3) : y'' - y' + y = 0$

Remarques :

1. Dans chaque situation, on a une infinité de solutions pour l'équation homogène. Cette infinité dépend de deux paramètres, qui nécessiteront deux conditions initiales pour être fixés.
2. dans le dernier cas, on peut transformer l'expression trigonométrique *(on a vu ça en TD)* et l'ensemble des solutions de (E) est alors :

$$\left\{x \longmapsto \lambda e^{\alpha x} \cos(\beta x + \Phi) / (\lambda ; \Phi) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

   Φ est appelé *déphasage*.

2 Résolution de (E)

Théorème
Soit f une solution particulière de (E).
Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f + g$ avec g qui est solution de (E_h).

Méthode
Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

- étape 1 : résolution de l'équation homogène (une infinité de fonctions) ;
- étape 2 : recherche d'une solution particulière pour l'équation complète (une fonction f) ;
- étape 3 : résolution de l'équation complète (f+solutions de E_h) ;
- étape 4 : trouver **la** solution de (E) qui vérifie les conditions initiales

3 Exemples de référence

Soit ω un réel.

a) $y'' = \omega^2 y$

b) $y'' = -\omega^2 y$