Produits scalaires et espaces euclidiens

Introduction *by* Wikipedia

En mathématiques, un espace euclidien est un objet algébrique permettant de généraliser de façon naturelle la géométrie traditionnelle développée par Euclide, dans ses Éléments. Une géométrie de cette nature modélise, en physique classique, le plan ainsi que l'espace qui nous entoure. Un espace euclidien permet également de traiter les dimensions supérieures ; il est défini par la donnée d'un espace vectoriel sur le corps des réels, de dimension finie, muni d'un produit scalaire, qui permet de « mesurer » distances et angles.

Notation : dans tout le chapitre E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire

Définition
On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- ϕ est **bilinéaire**, c'est-à-dire linéaire sur chaque composante. Autrement dit :
- ϕ est **symétrique** :
- ϕ est **positive** :
- ϕ est **définie** :

Lorsqu'on travaille avec un produit scalaire ϕ, plutôt que $\phi(x, y)$, on écrit $< x, y >$, $(x|y)$, ou encore $x \cdot y$.

Exemples : commençons par un exemple anecdotique pour voir comment on vérifie que les confitions de la définition sont satisfaites, puis passons à des exemples de référence (pour lesquels les vérifications seront faites mentalement).

1. Sur $\mathbb{R}^2$, $\phi((x, y),(x', y')) = xx' + \frac{1}{2}(xy' + x'y) + yy'$ définit un produit scalaire :

2. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$:

3. De même, sur $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 1$) :

4. De façon analogue, sur les colonnes de taille n (≥ 1), on définit un produit scalaire en posant $< X, Y >=$

5. Sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, $<f,g>=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire.

Exercice
Sur $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que $<P,Q>=P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$ est un produit scalaire.

Définition

- On dit que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni du produit scalaire $<\,.\,,\,.\,>$ constitue un **espace préhilbertien réel**.
- Si, de plus, E est de dimension finie, alors on dit que c'est un **espace euclidien**.

Remarques :

a) Tout espace vectoriel réel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et peut donc être muni d'une structure euclidienne.

b) La structure euclidienne repose sur le produit scalaire et, comme on a vu, il peut y en avoir plusieurs. Parler d'un espace euclidien E sans préciser le produit scalaire utilisé n'a pas de sens, sauf si le produit scalaire est implicite comme cela peut se produire pour les cas usuels (notamment $\mathbb{R}^n$).

2 Norme associée à un produit scalaire

Notation : dans ce paragraphe $(E,<\,.\,,\,.\,>)$ est un espace préhilbertien réel, on désigne par *vecteurs* les éléments de E.

Définition

- On définit la **norme euclidienne** sur E par : $\forall x\in E,\ \|x\|=$
- On définit la **distance euclidienne** entre les éléments de E par : $\forall(x,y)\in E^2,\ d(x,y)=$

Exemple : sur $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on a $\|(x,y)\|=$

Vocabulaire : un vecteur x est dit **unitaire** lorsque

Proposition (propriétés de la norme euclidienne)
La norme euclidienne vérifie les propriétés suivantes :

i. **Séparation** :

ii. **Homogénéité** :

Démonstration

i.

ii.

Remarque : la notion de norme peut être définie sans produit scalaire. Une norme est une application qui vérifie les propriétés de séparation, d'homogénéité et l'inégalité triangulaire. La propriété précédente indique que la norme euclidienne valide deux conditions sur les trois requises pour être une norme (la troisième arrive vite !).

Proposition (Propriétés « naturelles » d'une norme)

i. Positivité :

ii. Réciproque de la propriété de séparation :

iii. La distance est symétrique :

Démonstration

■

Proposition (Calculs usuels)

i. $\forall (x;y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 =$ et $\|x-y\|^2 =$

ii. $\forall (x;y) \in E^2,\ <x,y>=$

iii. $\forall (x;y) \in E^2,\ \|x\|^2 + \|y\|^2 =$

Démonstration

i.

ii. et iii. : Il suffit de calculer.

Remarque : la première définition de produit scalaire que vous ayez apprise, donnée dans le cadre des vecteurs du plan, est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

On vient de définir, dans un cadre général, le produit scalaire et la norme associée. Il n'y aurait plus qu'un pas à faire pour créer le cosinus puis l'angle non-orienté formé par deux vecteurs, mais ce n'est pas au programme.

3 Inégalité de Cauchy Schwarz

Notation : dans ce paragraphe $(E, < . , . >)$ est un espace préhilbertien réel, on désigne par *vecteurs* les éléments de E.

Proposition (Inégalité de Cauchy Schwarz)

$$\forall (x;y) \in E^2,\ |<x,y>|\ \leq\ \|x\|.\|y\|$$

Plus précisément, il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs x et y sont colinéaires.

Démonstration

Soit x, y deux éléments de E. On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto \|tx-y\|^2 \end{array} \right.$.

On a, $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t^2\|x\|^2 - 2t <x,y> + \|y\|^2$ et donc f est une fonction polynômiale.

- Si $\|x\| \neq 0$ alors f est de degré 2 et, comme $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0$, son discriminant est négatif ou nul. Autrement dit :
$$(2<x,y>)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \iff |<x,y>|\ \leq\ \|x\|.\|y\|$$
- Sinon $x = 0_E$ et donc $<x,y>= 0 = \|x\|.\|y\|$ et l'inégalité de Cauchy Schwarz est également vraie.

Pour le cas d'égalité, raisonnons par double implication.
Il est clair que si x et y sont colinéaires alors on a $|<x,y>|\ =\ \|x\|.\|y\|$.
Réciproquement, si on a égalité, soit $x = 0_E$ alors les vecteurs x et y sont colinéaires. Sinon, $x \neq 0_E$ alors $f(t)$ est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est nul et donc f admet une racine réelle α. On a alors $f(\alpha) = 0 \iff \|\alpha x - y\| = 0 \iff \alpha x = y$. Finalement, x et y sont bien colinéaires.

Remarque : l'inégalité de Cauchy Schwarz est souvent utile, en particulier dans deux contextes : $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et les fonctions continues sur un segment $I \subset \mathbb{R}$ muni du produit scalaire $<f,g>= \int_I fg$.
On redonne l'inégalité dans ces deux contextes :

a) dans $\mathbb{R}^n$:

b) dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$:

Proposition (Inégalité triangulaire)
La norme euclidienne sur E vérifie l'inégalité triangulaire. Autrement dit :

Démonstration
Soit $(x, y) \in E^2$. On calcule et on utilise Cauchy Schwarz :

$$\|x+y\|^2 \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \leq\; \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|.\|y\| \;=\; (\|x\| + \|y\|)^2$$

En prenant la racine carrée, on obtient le résultat voulu. $\blacksquare$

Proposition
On a égalité dans l'inégalité triangulaire si, et seulement si, les vecteurs x et y sont colinéaires avec un rapport de proportionnalité positif.

Autrement dit : $\exists k \in \mathbb{R}^+ \; / x = ky$ ou $y = kx$.

Remarque : la formulation n'est pas uniquement $\exists k \in \mathbb{R}^+ \; / \; x = ky$ car

Démonstration
Soit des vecteurs x et y tels que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.
Le cas d'égalité dans l'inégalité triagulaire correspond au cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a donc la colinéarité de x et y : il existe un couple de réels $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $\alpha x = \beta y$.
Supposons $\alpha \neq 0$, on a alors $x = \frac{\beta}{\alpha} y$: ($\spadesuit$).
L'égalité dans Cauchy Schwarz s'écrit : $< x, y > = \; \|x\|.\|y\| \implies < x, y > \geq 0$.
On remplace x grâce à ($\spadesuit$) et il vient : $< \frac{\beta}{\alpha} y, y > \geq 0$ ce qui implique que $\frac{\beta}{\alpha} \geq 0$.
Finalement, on a bien trouvé un coefficient de proportionnalité positif entre x et y. $\blacksquare$

4 Orthogonalité

Notation : dans ce paragraphe $(E, < \, . \, , \, . \, >)$ est un espace préhilbertien réel, on désigne par *vecteurs* les éléments de E.

Définition
On dit que les vecteurs x et y sont **orthogonaux** lorsque :

Exemple : cos et sin sont-ils des vecteurs orthogonaux de $\mathcal{C}^0([0; \pi])$ muni du produit scalaire usuel ?

Théorème (Pythagore pour deux vecteurs)

Les vecteurs x et y sont orthogonaux si, et seulement si,

Démonstration

Définition
Soit A et B deux parties non-vides de E.

i. On dit que A et B sont orthogonales lorsque :

ii. L'orthogonal de A est la partie de E notée $A^{\perp}$ définie par : $A^{\perp} =$

Proposition
Soit A une partie non-vide de E. $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration
Soit $A \in \mathcal{P}(E) \backslash \{\emptyset\}$.

—

—

Proposition (propriétés de l'orthogonal d'une partie)
Soit A une partie non-vide de E.

i. Si $A = \text{Vect}(a_1, \ldots, a_n)$ alors, pour tout vecteur x :

$$x \in A^{\perp} \iff$$

ii. Si $A \subset B$ alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

iii. $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

Démonstration
Soit A une partie non-vide de E.

i.

ii.

iii.

Exemple : on travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel ; soit $A = \{(1;2;3)\}$. Déterminer $A^{\perp}$.

Définition
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs. On dit que $\mathcal{F}$ est :

— **orthogonale** lorsque

— **orthonormée** (ou orthonormale) lorsque

Théorème (Pythagore pour $n > 2$ vecteurs)
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale. On a :

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

Remarques :

a) la démonstration sera vue en TD.

b) La réciproque est fausse (en général).

Proposition
Une famille de vecteurs qui est orthogonale et qui ne comporte pas de vecteurs nuls est libre.

Démonstration

Remarques :

1. Une famille orthonormée est un cas particulier de famille orthogonale qui ne comporte pas de vecteurs nuls, les familles orthonormées sont donc libres.
2. Si $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée alors, $\forall 1 \leq i, j \leq n$ on a $< e_i, e_j >= \delta_{i,j} =$
3. Nous venons de voir que les familles orthonormées sont libres. La réciproque est évidemment fausse mais on verra plus loin dans le chapitre comment créer, à partir d'une famille libre, une nouvelle famille qui sera orthonormée avec l'**algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**.

5 Base orthonormée

Notation : dans ce paragraphe $(E, < . , . >)$ est un espace euclidien dont la dimension est $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par *vecteurs* les éléments de E.

Proposition
E admet une base orthonormée.

Démonstration
E est de dimension finie, il admet donc une base $(e_1, \dots, e_n)$. C'est en particulier une famille libre et, si on lui applique l'algorithme de Gram-Schmidt, on obtient une famille libre et orthonormée de n vecteurs, donc une base orthonormée. ■

Remarque :

Démonstration
Procédons par récurrence sur n.

— Si $n = 1$ alors E admet une base (e) et $(\frac{1}{\|e\|}e)$ est une base orthonormée de E.

— Supposons que tout espace euclidien de dimension n admette une base orthonormée ; montrons que c'est aussi le cas pour les espaces de dimension $n+1$. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$. Soit x un vecteur non nul de E. Quitte à diviser x par sa norme, on considère qu'il est unitaire.
L'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(y) =< x, y >$ est linéaire. Son noyau est $\text{Vect}(x)^\perp$ et, puisque $\phi(x) = 1$, alors $\text{Im } \phi = \mathbb{R}$. En appliquant le théorème du rang, il vient $\dim(\text{Vect}(x)^\perp) = n$ et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ce sous-espace : soit donc $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\text{Vect}(x)^\perp$. Soit $\mathcal{F} = (x, e_1, \dots, e_n)$.
Montrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre : soit $\lambda x + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n = 0_E$ une combinaison linéaire nulle.

$$0 =< x, 0_E > \iff 0 =< x, \lambda x + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n > \iff 0 = \lambda + < x, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n >$$

Or, $\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n \in \text{Vect}(x)^\perp$ donc $\lambda = 0$. Comme la famille $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base d'un sous-espace, c'est une famille libre et donc $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$.
Finalement, $\mathcal{F}$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, c'en est donc une base. Par construction, elle est orthonormée (les e_i sont normés et orthogonaux entre eux, ils sont tous orthogonaux à x).

Remarque : les exemples pratiques viendront en fin de chapitre avec l'algorithme de Gram-Schmidt.

Proposition
Toute famille libre et orthonormée peut être complétée en une base orthonormée.

Remarque : on pourrait, là encore, proposer une démonstration évitant l'algorithme de Gram-Schmidt mais on s'en dispense car, pour mettre en oeuvre cette propriété, on se sert de Gram-Schmidt.

Proposition (Calculs en base orthonormée)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

i. Pour tout vecteur x, la décomposition de x dans $\mathcal{B}$ est :

$$x =< x, e_1 > e_1 + \cdots + < x, e_n > e_n$$

Autrement dit : pour tout $1 \leq i \leq n$ la coordonnée de x selon e_i est $< x, e_i >$.

ii. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ alors $< x, y > =$

iii. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors $\|x\| =$

Démonstration

i. Soit $x \in E$. On peut décomposer x dans $\mathcal{B}$: $x = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$ avec $x_1, \ldots, x_n$ des réels. On a :

$$1 \leq i \leq n, \quad < x, e_i > = < \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, e_i > = \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{< e_k, e_i >}_{= \delta_{k,i}} = x_i.$$

ii. Il suffit d'écrire le produit scalaire et d'utiliser la bilinéarité.

iii. On applique ii à $y = x$.

ATTENTION : ces formules ne sont valables que si la base est orthonormée.

6 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Notation : dans ce paragraphe $(E, < \ . \ , \ . \ >)$ est un espace préhilbertien réel, on désigne par *vecteurs* les éléments de E.

Proposition
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

De plus, parmi les supplémentaires de F, un seul est orthogonal à F : $F^\perp$.

Démonstration
F étant de dimension finie, il admet une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$. Raisonnons par analyse-synthèse : considérons $x \in E$.

Analyse : supposons $x = \underbrace{x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n}_{\in F} + \underbrace{y}_{\in F^\perp}$. Pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $< x, f_i > = \ x_i$.

Il suit que $y = x - \sum_{i=1}^{n} < x, f_i > f_i$.

Synthèse : $x - \sum_{i=1}^{n} < x, f_i > f_i$ est un élément de $F^\perp$ car

$x = \sum_{i=1}^{n} < x, f_i > f_i + \left(x - \sum_{i=1}^{n} < x, f_i > f_i \right)$ assure l'existence d'une écriture de x comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.

Remarques :

a) En conservant les notations de la définition, $F^\perp$ est **le** supplémentaire orthogonal de F.

b) Si E est euclidien, c'est-à-dire de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, alors dim $F^\perp =$

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- On a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- Si F est de dimension finie, alors $F = (F^\perp)^\perp$.

Démonstration

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- Soit $x \in F$. Pour tout $y \in F^\perp$ on a $< x, y >= 0$ et donc $x \in (F^\perp)^\perp$. Ainsi : $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- Supposons que F est de dimension finie. Soit $x \in (F^\perp)^\perp$, puisque $E = F \oplus F^\perp$ il existe une décomposition $x = f + f'$ avec $f \in F$ et $f' \in F^\perp$. On a $\|f'\|^2 = < f', f' > = < f', x > = 0$ car $f' \in F^\perp$ et $x \in (F^\perp)^\perp$. Il suit que $f' = 0_E$ et donc $x = f$ est bien un élément de F. Finalement, on a bien $F \supset (F^\perp)^\perp$ et donc $F = (F^\perp)^\perp$.

Remarque : l'hypothèse de dimension finie est cruciale pour l'inclusion réciproque, on verra un exemple en TD où on a $F \neq (F^\perp)^\perp$.

Notation : dans la suite, F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

La **projection orthogonale sur** F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Notation : dans la suite, on note p_F la projection orthogonale sur F.

Proposition

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de F. On a :

$$\forall x \in E,\ p_F(x) =< x, f_1 > .f_1 \ + \cdots + \ < x, f_n > .f_n$$

Démonstration

Il s'agit d'une reformulation de la « décomposition » des vecteurs de E dans $F \oplus F^\perp$. ■

Proposition

Soit F un sous-espace de dimension finie, $x \in E$.

- On appelle **distance de** x **à** F et on note $d(x, F)$ le réel positif $d(x, F) = d(x, p_F(x))$.
- $d(x, F) = \min\{d(x, y)\ /\ y \in F\}$.
- De plus, ce minimum n'est atteint que pour $y = p_F(x)$.
- On a : $d(x, p_F(x))^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.

Démonstration

Soit $x \in E$. $\{d(x, y)\ /\ y \in F\}$ amdet une borne inférieure car c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est minorée par 0. Montrons qu'elle a un minimum et qu'il correspond à $d(x, p_F(x))$.

On sait écrire x comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^{\perp}$: $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$: $(\star)$.
Pour tout $y \in F$ on a :

$$d(x,y)^2 = \|x-y\|^2 = \| \underbrace{(p_F(x) - y)}_{\in\ F} + \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in\ F^{\perp}} \|^2 = \|p_F(x)-y\|^2 + \|x-p_F(x)\|^2 \geq \|x-p_F(x)\|^2 = d(x,p_F(x))^2$$

Dans la ligne précédente, on a égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.
Enfin, $(\star) \Longrightarrow \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$ ce qui donne $d(x, p_F(x))^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$. ■

Remarque : il faut faire attention à la façon dont on représente les espaces vectoriels, les figures sont là pour aider mais il faut prendre garde à leurs limites.

Proposition (Inégalité de Bessel)
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthonormée. On a, pour tout vecteur x :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2} \ \leq\ \|x\|$$

Démonstration
Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $x \in E$, $d(x,F) = \|p_F(x)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2}$.

On a donc, $\forall y \in F$, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2} \ \leq\ d(x,y)$. En prenant $y = 0_E$ on a le résultat voulu. ■

7 Algorithme d'orthonormalisation Gram-Schmidt

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - z = 0$.

1. Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}$.

2. En partant de $\mathcal{B}$, construire une base orthonormée de $\mathcal{P}$.

Remarque : lorsqu'on a compris comment faire sur deux vecteurs (c'est l'objectif de l'exemple qui précède), on a tout compris ! L'algorithme qui suit décrit le cas général.

Algorithme de Gram-Schmidt

Entrée : une famille libre de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$.

Sortie : une famille orthonormée de vecteurs $(y_1, \dots, y_n)$ telle que

$$\forall j \in [\![1;n]\!],\ \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_i) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i)$$

On construit la suite des vecteurs $(y_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ par récurrence.

— On prend $y_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$

— Soit $1 \leq k < n$ et supposons construits $y_1, \dots, y_k$, construisons y_{k+1}.

Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_k)$, on pose $z = x_{k+1} - p_F(x_{k+1})$.
On a $x_{k+1} \notin F$ donc $(y_1, \dots, y_k, z)$ est libre. Par construction $z \perp F$ et $\mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_k, z) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1})$ il ne reste plus qu'à rendre cette famille orthonormale : on pose $y_{k+1} = \frac{1}{\|z\|} z$.

Remarque : comme la famille $(x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est libre, aucun des x_i n'est nul et on peut diviser par leurs normes.

Exemples :

a) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on considère les vecteurs $a = (1;2;2)$, $b = (1;1;0)$ et $c = (0;-1;1)$. Après avoir justifié que la famille (a, b, c) est libre, lui appliquer l'algorithme de Gram Schmidt.

b) Dans $\mathcal{C}^0([0; \frac{\pi}{2}])$ muni de son produit scalaire usuel, appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à $(\cos, \sin)$.

Remarque importante : dans l'algorithme tel qu'il a été donné, il y a des choix qui sont faits : pour chaque y_k on aurait pu prendre l'opposé de ce qui a été choisi.
Si l'on souhaite obtenir l'unicité, on rajoute une condition et on demande que chaque y_k vérifie $< x_k, y_k > \geq 0$.
Le résultat que produit l'algorithme est alors appelé « l'orthonormalisé de Gram-Schmidt ».

Exercice
Reprendre les exemples précédents pour fournir l'orthonormalisé de Gram-Schmidt des familles de vecteurs.