# Chapitre 1 : Boîte à outils

## 1 Elements de logique et notations mathématiques

### 1.1 Propositions, connecteurs

**Définition**
Une proposition mathématique est une assertion qui peut prendre deux valeurs : Vrai ou Faux. Cette valeur est la *valeur de vérité* de la proposition.

**Exemples :**

1. « 3 est un multiple de 4 » est une proposition dont la valeur de vérité est Faux.
2. « Lima est la capitale du Pérou » est une proposition dont la valeur de vérité est Vrai.
3. « 1m90, c'est grand » n'est pas une proposition car...

**Définition**
Lorsque deux propositions ont la même valeur de vérité, on dit qu'elles sont *équivalentes*.

**Remarque :** démontrer $p$ on peut tout aussi bien démontrer toute autre proposition qui est équivalente à $p$.

À partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en créer de nouvelles.
Par exemple « J'ai faim » **ET** « J'ai soif » qui est vraie si, et seulement si, « J'ai faim » est vraie et « J'ai soif » est vraie. **ET** est un *connecteur logique* appelé *conjonction* et noté $\wedge$ et défini par sa *table de vérité* :

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| Vrai | Vrai | Vrai |
| Vrai | Faux | Faux |
| Faux | Vrai | Faux |
| Faux | Faux | Faux |

De façon analogue :

**Définition**
Soit $p$ et $q$ deux propositions.
- La négation de $p$ est notée $\neg p$.
- La disjonction de $p$ et $q$, $p$ **OU** $q$ est notée $p \vee q$.
- « $p$ implique $q$ » est notée $p \Longrightarrow q$.
- « $p$ est équivalente à $q$ » est notée $p \Longleftrightarrow q$.

Ces connecteurs logiques sont définis par leurs tables de vérité :

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| Vrai | Faux |
| Faux | Vrai |

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \Longrightarrow q$ | $p \Longleftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai |
| Vrai | Faux | Vrai | Faux | Faux |
| Faux | Vrai | Vrai | Vrai | Faux |
| Faux | Faux | Faux | Vrai | Vrai |

**Remarque :** il y a une subtilité sur les équivalences :

— on dit que $p$ et $q$ sont équivalentes lorsqu'elles ont la même valeur de vérité ;

— $p \iff q$ est une proposition.

$p \iff q$ est vraie si, et seulement si, les propositions $p$ et $q$ sont équivalentes, d'où l'abus de language (appeler cette proposition « $p$ et $q$ sont équivalentes »).

**Méthode**
Pour montrer que deux propositions sont équivalentes on peut montrer qu'elles ont même table de vérité.

**Exercice**
Soit $p$ et $q$ deux propositions. Montrer que $p \implies q$ est équivalente à $\neg p \vee q$.

**Réponse**
On dresse les tables de vérité :

| $p$ | $q$ | $p \implies q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| Vrai | Vrai | | | |
| Vrai | Faux | | | |
| Faux | Vrai | | | |
| Faux | Faux | | | |

Pour conclure, on observe que

**Remarque :** chaque ligne de la table de vérité correspond à un cas possible et tous les cas possibles sont envisagés. Lorsqu'on procède de la sorte, on parle de *disjonction des cas.*

**Proposition**
(Négation d'une conjonction, d'une disjonction)
Soit $p$ et $q$ deux propositions.

i. $\neg(p \vee q)$ est équivalente à $(\neg p) \wedge (\neg q)$.

ii. $\neg(p \wedge q)$ est équivalente à $(\neg p) \vee (\neg q)$.

**Définition**
Soit deux propositions $p$ et $q$,

— la proposition $q \implies p$ est appelée la de $p \implies q$. (On peut aussi la noter $p \impliedby q$).

— la proposition $\neg q \implies \neg p$ est appelée la de $p \implies q$.

## 1.2 Quantificateurs

**Définition**
On appelle **prédicat** une propriété qui porte sur un (ou plusieurs) objet(s). Si $P$ désigne le prédicat et $x$ l'objet, on notera $P(x)$.

**Exemples :**

1. « est un nombre pair » est un prédicat. Si on le note $P$, $P(2)$ est vrai et $P(7)$ est faux.
2. « est un nombre plus grand que » est un prédicat à deux arguments. On pourrait le noter $P$ et écrire $P(7, -3)$ pour dire que « 7 est plus grand que $-3$ » mais on préférera utiliser

**Définition**

Soit $P$ un prédicat et $E$ un ensemble.

— $\forall x \in E,\ P(x)$ est une nouvelle proposition qui signifie que **pour tout** objet $x$ de l'ensemble $E$, la proposition $P(x)$ est vraie.

$\forall$ s'appelle **quantificateur universel**.

— $\exists x \in E,\ P(x)$ est une nouvelle proposition qui signifie que parmi les objets $x$ de l'ensemble $E$, **il en existe (au moins) un** tel que la proposition $P(x)$ est vraie.

$\exists$ s'appelle **quantificateur existentiel**.

**Exemple :**

— $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 \neq 2$ est vraie car la fonction carrée est croissante et que $1^2 < 2 < 2^2$ ;

— $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$ est vraie car

**Remarque :** le lien entre $\forall$ et $\exists$ est profond. Quelle est la négation de la proposition « Tous les élèves de la classe de Terminale 1 ont eu le bac » ?

## 1.3 Notations usuelles en mathématiques, en physique, en sciences de l'ingénieur

Les lettres de l'alphabet grec sont abondamment utilisées, elles vous sont fournies dans un document annexe. De la même façon qu'on a l'habitude de noter $x$ la variable réelle et $z$ la variable complexe, certaines lettres grecques ont une signification usuelle :

— $\varepsilon$ est utilisé pour une quantité petite (voire infinitésimale) ;

— $\theta$ et $\phi$ sont privilégiées pour des angles ;

— $\rho$ sert pour des distances...

L'histoire de la construction des disciplines a donné lieu a plusieurs notations pour un même objet. Plusieurs exemples sont notables :

- En mathématiques, la lettre $i$ désigne un nombre *non réel* qui vérifie :
  Avec ce nouveau nombre, on construit :
  En sciences physiques la lettre $i$ est reservée à l'intensité du courant électrique, on utilise donc $j$ pour les nombres complexes... Mais $j$ a aussi une signification en mathématiques !

- En sciences physiques, la variable réelle la plus fréquemment utilisée est le temps que l'on représente par la lettre $t$ ; les fonctions sont donc de la forme $f(t)$. Si on étudie l'abscisse d'un point mobile qui se déplace sur un axe, la fonction manipulée sera (naturellement) notée $x(t)$, ce qui peut prêter à confusion avec le cours de mathématiques où $x$ désigne presque toujours la variable.

- La dérivation des fonctions se note de plusieurs façons, on donne ici les plus courantes. Pour une fonction $f$, sa dérivée sera notée $f'$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (notation dite **différentielle**) ou encore $\dot{f}$ (cette notation est propre à la mécanique).
  Si on dérive une seconde fois la fonction, on notera : ou ou

**Attention :** la notation $'$ est réservée aux fonctions qui ont un nom !
Si on veut dériver $x^2+3$, soit on utilise la notation différentielle et on écrit $\frac{\mathrm{d}(x^2+3)}{\mathrm{d}x}$, soit on la nomme pour utiliser le $'$ mais il est interdit d'écrire $(x^2+3)'$.

**Remarque :** certaines fonctions opèrent sur plusieurs variables. Par exemple, dans un circuit électrique, la loi d'Ohm $U = RI$ (avec $U$ la tension en Volts, $R$ la résistance en Ohms et $I$ l'intensité en Ampères) peut se formuler en écrivant que $U$ est une fonction des variables $R$ et $I$.
Lorsqu'elle est dérivable, on peut dériver une fonction de plusieurs variables selon une ou plusieurs variables. La notation la plus courante est similaire à la notation différentielle, elle utilise un « d ronde » : $\partial$.

**Exemple :**

$$\frac{\partial(x^2y+2)}{\partial x} = \qquad ; \quad \frac{\partial(x^2y+2)}{\partial y} = \qquad ; \quad \frac{\partial^2(x^2y+2)}{\partial x\partial y} =$$

# 2 Travailler avec des ensembles

## 2.1 Généralités, notations

**Définition**
Un ensemble est une collection (non ordonnée) d'objets dont ont dit qu'ils appartiennent à l'ensemble, ou qu'ils en sont des éléments.

Soit $E$ un ensemble, $x$ un objet.

- « $x$ est élément de $E$ » se note

- « $x$ n'est pas élément de $E$ » se note

Pour noter les ensembles, on utilise des accolades $\{\ldots\}$ et il y a deux façons de procéder : on énumère tous les objets de l'ensemble ou bien on indique une propriété qui caractérise ses éléments. (On définit l'ensemble en extension ou en compréhension).

Un ensemble particulier : l'ensemble vide qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.

**Exemples :**

**Définition**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles.

- On dit que $F$ est inclus dans $E$ lorsque

  On note alors :

- l'**union** de $E$ et $F$ est l'ensemble

- l'**intersection** de $E$ et $F$ est l'ensemble

**Attention** : il ne faut pas confondre appartenance $\in$ et inclusion $\subset$. L'appartenance est une relation entre un objet et un ensemble alors que l'inclusion est une relation entre deux ensembles.

## 2.2 Produit cartésien d'ensembles

**Définition**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Le **produit cartésien** des ensembles $E$ et $F$, noté $E \times F$, est l'ensemble formé des couples de la forme $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.

**Exemple :** soit $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; \pi\}$ alors $E \times F =$

**Remarques :**

1. On généralise facilement à des produits cartésiens de plus de deux ensembles ;
2. $E \times E$ est noté .

## 2.3 Ensembles de nombres

Les nombres que nous manipulons appartiennent à différents ensembles :

— $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ ;
— $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$ ;
— $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres que l'on peut écrire sous forme d'une fraction d'entiers ;
— $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, c'est-à-dire l'ensemble des abscisses qui existent sur une droite graduée ;
— $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ avec $a$ et $b$ des réels. Ceci se note :

$$\mathbb{C} = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$$

Il y a des relations d'inclusion entre ces ensembles :

## 2.4 Ordre dans $\mathbb{R}$

**Définition**
Soit $x$ et $y$ deux réels. On dit que $x$ est inférieur à $y$ lorsque $y - x$ est un réel positif. On note $x \leq y$ (ou $y \geq x$).
Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on note $x < y$.

**Proposition (Compatibilité de $\leq$ avec les opérations)**
Soit $x, y, z, t$ des réels.

i. Si $x \leq y$ et $z \leq t$ alors

ii. Si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$ alors $0 \leq xz \leq yt$.

**Démonstration**
Soit $x, y, z, t$ des réels.

i. Supposons $x \leq y$ et $z \leq t$, on veut montrer que

ii. Supposons $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$, on veut montrer que

## 2.5 Intervalles

**Définition**
On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de la droite réelle que l'on peut surligner sans lever le stylo.

**Exemples :** les intervalles sont de plusieurs sortes, certains intervalles particuliers ont une notation qui leur est propre :

- $[1; 2]$ est un intervalle fermé borné, aussi appelé un **segment** ;
- $]-3; 0[$ est un intervalle ouvert et borné ;
- Un intervalle semi-ouvert et borné :
- Un intervalle ouvert et non-borné :
- $\mathbb{R} =$
- $\mathbb{R}^* =$
- $\quad = [0; +\infty[$
- $\quad = ]0; +\infty[$

**Remarque :** on a donné des définitions intuitives (par exemple : on a parlé de *bornes* sans préciser de quoi il s'agit). Ceci sera revu de façon plus rigoureuse dans un prochain chapitre.

De façon analogue aux intervalles de $\mathbb{R}$, il existe des intervalles d'entiers.

**Définition**
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, avec $a \leq b$, $[\![a; b]\!]$ désigne

**Exemple :** $[\![-2; 3]\!] =$

**Remarque :** un intervalle d'entier est l'**intersection** entre l'intervalle réel ayant les mêmes bornes et $\mathbb{Z}$. Par exemple, $[\![-2; 3]\!] =$

### 2.6 Valeur absolue

**Définition**
Soit $x$ un réel. La valeur absolue de $x$ est le plus grand nombre entre $x$ et son opposé $-x$.
On la note $|x|$.

$$|x| = \max(-x, x)$$

**Exemples :** $|7| =$ ; $|-5| =$ ; $|3 - \pi| =$

**Exercice**
Soit $x$ un réel et $C(x) = |x + 2| + |x^2 + 2x + 5|$. Trouver, en distinguant des cas selon les valeurs du réel $x$, une expression de $C(x)$ sans valeur absolue.

**Réponse**
Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x + 2|$ vaut

**Remarque :** $|x|$ est la **distance** entre le point correspondant à $x$ et l'origine sur la droite réelle.

**Proposition**
Soit $x$ et $y$ deux réels.
La distance entre les points d'abscisses $x$ et $y$ sur la droite réelle est $|x - y|$.