Chapitre 2 : calculer dans $\mathbb{C}$

Notations : dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Généralités sur les complexes

1.1 Forme algébrique

Définition

- On note i un nombre, non réel, qui vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
- On appelle **nombres complexes** les nombres de la forme $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b des réels. On dit alors que a est la **partie réelle** de z et que b est sa **partie imaginaire** ; on les note respectivement $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Pour un complexe z, l'écriture $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$ s'appelle la **forme algébrique de** z, cette écriture de z est unique.

Exemples :

Remarques :

a) Tout réel x est un nombre complexe :

b) **Attention :** une partie imaginaire est un nombre réel.

c) L'unicité de la forme algébrique signifie que, si z et z' sont deux complexes on a :

$$\left(z = z'\right) \iff \left(\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')\right)$$

Méthode (Pour montrer que deux complexes z et z' sont égaux)

Remarque : il y a une correspondance bijective entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. On connait d'autres correspondances bijectives entre $\mathbb{R}^2$ et des ensembles : lesquelles ?

Définition

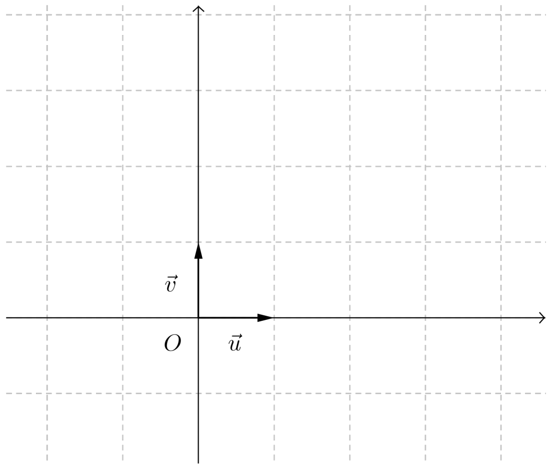
Soit z un complexe.

i. On dit que le point M du plan de coordonnées $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ est l'**image** de z dans le plan ; réciproquement, on dit que z est l'**affixe** du point M et on notera $M(z)$.

ii. De façon analogue, on dit que z est l'**affixe** du vecteur $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(z)) \end{pmatrix}$.

Exemples :

- Représenter les points $A(2+3\mathrm{i})$ et $B(3-\mathrm{i})$.
- Que des dire des complexes dont l'image est sur l'axe des ordonnées ?
- Où sont situées les images des complexes réels ?
- Représenter $\Gamma = \{M(z)/\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.



Remarque : le plan nous permet donc de représenter $\mathbb{C}$. On parle de **plan complexe**.

Définition

Soit $z = a + ib$ un complexe sous forme algébrique, $M(z)$ son image dans le plan complexe.

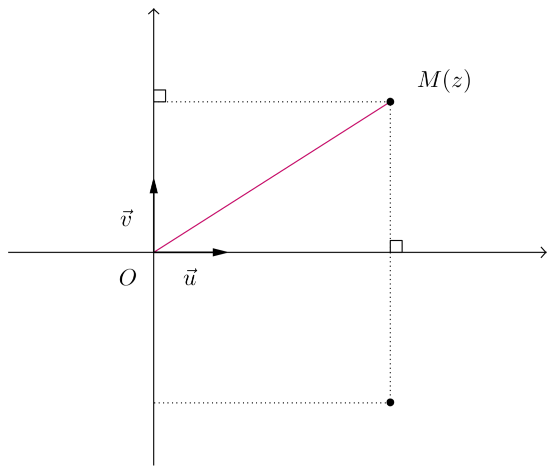
i. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

ii. Graphiquement, l'image de $\overline{z}$ dans le plan complexe est

iii. On appelle **module** de z, et on note $|z|$, la distance OM, c'est-à-dire la norme de $\overrightarrow{OM}$.

On a :

iv. Si $z \neq 0$, un **argument** de z désigne une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Remarque : pour un complexe non nul z, l'argument de z est défini à un multiple de 2π près (il en existe une infinité). Parmi les arguments de z, on appelle **argument principal** celui qui est dans $]-\pi;\pi]$, on le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Proposition

Soit z un complexe.

a) $|\overline{z}| = |z|$.

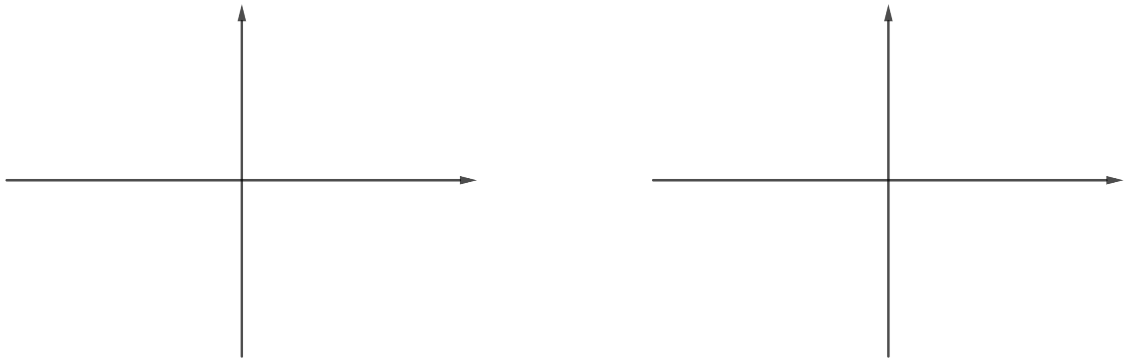
b) Si $z \notin \mathbb{R}^-$, $\mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$.

Démonstration

Ces deux résultats sont une conséquence directe des définitions géométriques de la conjugaison, du module et de l'agument. Par exemple, pour a) :

Remarque : pour b) on a du préciser $z \notin \mathbb{R}^-$ car

Exercice
Dans le plan complexe, représenter $\Lambda = \{M(z)/1 < |z| \leq 2\}$ et $\Pi = \{M(z)/\text{Arg}(z) \in [0; \frac{\pi}{6}]\}$.



1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Proposition
L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ se prolongent *naturellement* à $\mathbb{C}$. Ainsi, pour tous complexes z et z' de formes algébriques $z = a + ib$ et $z' = c + id$ on a :

- $z + z' =$
- $zz' =$

Exemples :

1. $(3 + 2i)^2 =$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(3 + \text{i})z - 2\text{i} = 3z - 1$.

Proposition
Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. La distance AB vaut $|z_B - z_A|$.

Démonstration
soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

D'une part, la distance AB vaut :

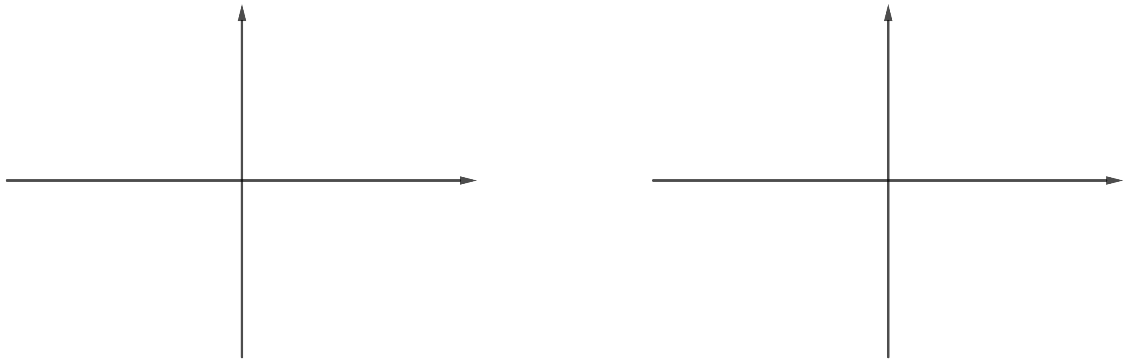
D'autre part, les coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

On en déduit que l'affixe complexe de ce vecteur est :

Soit, en faisant apparaître les affixes de A et B :

Finalement,

Exercice
Dans le plan complexe, représenter $\Sigma = \{M(z) / |z - 1 - \mathrm{i}| = 1\}$ et $\Theta = \{M(z) / |z + 2\mathrm{i} + 1| < 1\}$.



1.3 Propriétés du module et de l'argument

Proposition
Soit z un complexe. On a $z\overline{z} = |z|^2$.

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}$.

Remarque : en particulier, pour tout complexe z, le nombre $z\overline{z}$ est un réel (positif). Cela permet de trouver la forme algébrique de l'inverse d'un complexe non nul, ou d'une fraction.

Méthode (Pour trouver la forme algébrique d'une fraction)

Exemple : Montrer que $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ est imaginaire pur.

Proposition (Propriétés de la conjugaison)
Soit z et z' deux complexes. On a :

a) $\overline{\overline{z}} =$; $z + \overline{z} =$; $z - \overline{z} =$

b) La conjugaison est compatible avec les opérations :

$\overline{z + z'} =$; $\overline{z \times z'} =$ et, si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} =$

Proposition (Le module est compatible avec la multiplication et la division)
Soit z et z' deux complexes. On a :

a) $|zz'| =$ b) Si $z' \neq 0$, $|\frac{z}{z'}| =$ c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| =$

Démonstration
On se limite au produit.

Remarque : Le module n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction :

Proposition (Inégalité triangulaire)
Soit z et z' deux complexes. On a : $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

Démonstration
Soit z et z' deux complexes. On va raisonner par équivalences :

$$(\star) \ : \ |z+z'| \leq |z| + |z'| \iff |z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \qquad \text{(possible car } \qquad \text{)}$$

$$\iff (z+z')\overline{(z+z')} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$$

$$\iff z\overline{z'} + \overline{z}z' \leq 2|z||z'|$$

Or, $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$ d'où : $(\star) \iff \mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z||z'|$.

On a $|z||z'| = |z||\overline{z'}| = |z\overline{z'}|$; la dernière inégalité devient $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z\overline{z'}|$ qui est toujours vraie.

Par équivalences, l'inégalité triangulaire est donc démontrée.

Remarque : le cas d'égalité se produit lorsque z et z' ont le même argument principal. Dans la démonstration, cela revient à avoir $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}|$ qui se produit si, et seulement si, $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$. Nous verrons dans un prochain chapitre sur les complexes que l'argument d'un produit est la somme des arguments et on pourra conclure.

2 Nombres complexes de module 1

2.1 Ensemble $\mathbb{U}$

Définition
On appelle $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes dont le module est 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

Exemples :

1. $|1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{5} \neq 1$ donc $1 + 2\mathrm{i} \notin \mathbb{U}$.
2. $\in \mathbb{U}$, $\in \mathbb{U}$, $\in \mathbb{U}$, $\in \mathbb{U}$.
3. $j = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}$. En effet,

Géométriquement, $\mathbb{U}$ correspond

qui est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont de la forme

Proposition

Soit $z \in \mathbb{U}$, $M(z)$ son image dans le plan complexe.

- Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
- θ est **un argument** de z, c'est une mesure de $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.
- Si l'on rajoute la condition $\theta \in]-\pi;\pi]$ alors θ devient unique, c'est **l'argument principal** de z, on le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Exemples :

- $1 = 1 + 0\mathrm{i} = \cos(0) + \sin(0)\mathrm{i}$ et donc $\mathrm{Arg}(1) =$.
- $\mathrm{Arg}(\mathrm{i}) =$; $\mathrm{Arg}(-1) =$; $\mathrm{Arg}(-\mathrm{i}) =$.
- $j =$ donc $\mathrm{Arg}(j) =$.

Proposition

$\mathbb{U}$ est stable par produit :

Démonstration

Soit

Exercice

Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \end{array} \right.$ vérifie : $\forall(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2,\ f(\theta) \times f(\phi) = f(\theta+\phi)$.

Réponse

.

Cette **propriété fonctionnelle** est celle de

Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **exponentielle** de $\mathrm{i}\theta$ le nombre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} =$

Les propriétés calculatoires de exp découlant de sa propriété fonctionnelle, l'exponentielle complexe possède les mêmes :

Proposition

Soit $(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} =$ b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} =$ c) $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n =$ d) $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} =$

Remarque : la preuve est laissée en exercice. *(C'est sans difficulté mais formateur pour la rédaction).*

2.2 Formules d'Euler et de Moivre

Proposition (Formules d'Euler)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Démonstration
Par exemple, pour

Proposition (Formule de Moivre)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \iff \boxed{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)}$$

2.3 Application : linéarisation d'expressions trigonométriques

Il s'agit de tranformer une expression de la forme $\cos^n(x)$ (ou $\sin^n x$) en une somme de $\cos(kx)$ et de $\sin(kx)$.

Méthode (Linéariser une expression trigonométrique)

1. on utilise la formule d'Euler pour exprimer l'expression trigonométrique à l'aide de l'exponentielle complexe ;
2. on développe la puissance (grâce à la formule du binôme de Newton) ;
3. on utilise les propriétés de l'exponentielle puis on regroupe les termes « qui se ressemblent » ;
4. on utilise Euler faire apparaître des expressions trigonométriques à la place des exponentielles complexes.

Exemple : Pour $x \in \mathbb{R}$, linéarisons $\cos^3 x$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \cos(x)^3 = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x}$.

Remarque : on manipule une expression réelle, il ne doit donc pas rester de i à la fin.

On peut faire le "contraire". Par exemple, exprimons $\sin(3x)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et $\sin x$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\right) = \mathrm{Im}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3\right)$.

Après calculs, il vient : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(3x) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3(x)}$.

3 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Théorème
Soit z un complexe non nul.
z peut être écrit de façon unique sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\pi]$.
Cette expression est la **forme exponentielle** du complexe z.
On a alors : $r = |z|$ et $\theta = \mathrm{Arg}(z)$.

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ a pour module 1. Donc, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
L'unicité tient à l'unicité du module ainsi qu'à l'unicité de l'argument principal. ■

Remarque : en pratique, si r, ρ, θ et ϕ sont des réels (avec r et ρ strictement positifs) alors

$$\boxed{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \iff \begin{cases} \rho = r \\ \theta = \phi + k2\pi \text{ (avec un certain } k \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$$

Méthode (Prouver l'égalité de deux complexes non nuls avec la forme exponentielle)
On vérifie qu'ils ont même module et que leurs arguments correspondent au même angle, c'est-à-dire qu'ils sont congrus modulo 2π.

Cela signifie que deux complexes z et z' sont égaux si, et seulement si, leurs modules et leurs arguments principaux sont égaux.

Méthode (Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle)
- si l'argument principal est évident, il ne reste qu'à calculer le module.
- Sinon,
  1. on calcule le module de z ;
  2. on factorise la forme algébrique de z par $|z|$;
  3. on identifie $\cos\theta$ et $\sin\theta$ (avec $\theta = \mathrm{Arg}(z)$) ;
  4. si θ est un angle remarquable on donne sa valeur exacte.
  5. La forme exponentielle de z est $|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Exemples :
1. Donner la forme exponentielle de $1 + \mathrm{i}$.

2. Donner la forme exponentielle de $z = -\sqrt{3}\mathrm{i} + 1$.

3. Donner la forme exponentielle de $z = -3 - 7\mathrm{i}$.

Remarques :

1. L'écriture intermédiaire $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est la **forme trigonométrique** de z.
2. Il est facile de passer de la forme exponentielle à la forme algébrique.

   Par exemple, $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} =$

Proposition (Propriétés des arguments)

Soit z et z' deux complexes non nuls. On a :

a) $\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) =$ b) $\mathrm{Arg}(zz') =$ c) $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) =$

Démonstration

Pour chaque point, il s'agit d'exploiter l'unicité de la forme exponentielle d'un complexe. Par exemple pour a) :

Remarque : il y a une (petite) erreur dans l'énoncé de la propriété. En effet,

Méthode (Factoriser $\cos a \pm \cos b$ ou $\sin a \pm \sin b$ avec l'angle moitié)

1. on écrit la quantité étudiée comme la partie réelle (ou imaginaire) d'une somme d'exponentielles complexes ;
2. on fait intervenir l'angle moitié $\frac{a+b}{2}$ et on écrit $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$;
3. on factorise par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$;
4. on utilise la formule d'Euler pour la parenthèse ;
5. on conclut.

Exemple : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Transformons $\cos a + \cos b$ avec la technique de l'angle moitié.