

Chapitre 7 - Suites

1 Rappels et compléments sur les nombres réels

\mathbb{R} est muni de la **relation d'ordre** \leq , c'est-à-dire que \leq est une relation **binaire**, **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.

- binaire :
- réflexive :
- antisymétrique :
- transitive :

Avoir une relation d'ordre permet de définir les notions de minorant, de majorant, de minimum et de maximum pour une partie non vide de \mathbb{R} .

Par exemple, si A est une partie non vide de \mathbb{R} , on dit que le réel m est **minorant** de A lorsque :

Nous complétons ces notions déjà vues par celles de bornes supérieure et inférieure :

Définition

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

- S'il existe, on appelle **borne supérieure** de A
- S'il existe, on appelle **borne inférieure** de A

Lorsqu'elles existent les bornes supérieure et inférieure de A sont notées $\sup A$ et $\inf A$, elles sont alors uniques.

Exemple : Compléter le tableau ci-dessous

Ensemble	Min	Max	Inf	Sup
$\{-2; \pi; 10^{-5}\}$				
\mathbb{N}				
$[0; 1[$				
$\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$				

Théorème (Propriété de la borne supérieure / inférieure)

- Toute partie non-vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.
- Toute partie non-vide et minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Remarque : ce résultat est important, il servira souvent cette année dans les démonstrations des théorèmes d'analyse.

Exemple : $\{\sin(n), n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par 1, il admet donc une borne supérieure. (On la déterminera dans la fiche de TD).

Définition

- $-\infty$ est un objet qui vérifie :
- $+\infty$ est un objet qui vérifie :
- On appelle **droite réelle achevée** l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, on le note $\overline{\mathbb{R}}$.

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet des bornes supérieure et inférieure.

Remarque : il n'y a pas de relation d'ordre sur \mathbb{C} et donc ces notions ne s'y transposent pas.

Nous avons déjà évoqué les intervalles de \mathbb{R} qui peuvent être de différents types (ouverts, fermés, semi-ouverts, bornés ou non). Pour conclure ce premier paragraphe, une propriété qui permet de caractériser les intervalles parmi les parties de \mathbb{R} .

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$. I est un intervalle, si et seulement si, $\forall (a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$, $[a; b] \subset I$.

2 Généralités sur les suites de nombres réels

Une suite de réels est une liste infinie de nombres réels. Par exemple, on lance un dé, on note le résultat et on recommence indéfiniment : (3 ; 6 ; 2 ; 5 ; 5 ; ...).

Chaque élément de la liste ou **terme** de la suite a un rang ou **indice**, et on décide que le premier indice est 0. On obtient ainsi une application qui, aux indices entiers, associe les termes de la suite correspondants. Sur l'exemple, on a ainsi : $0 \mapsto 3 ; 1 \mapsto 6 ; 2 \mapsto 2 ; 3 \mapsto 5 ; \dots$

Définition

Une suite de nombre réels est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

On note u_n l'image de l'entier n par u , c'est le **terme général** de la suite.

Attention : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite u ; u_n désigne un terme (celui d'indice n).

Pour représenter une suite de réels, il y a (au moins) deux façons de faire :

Exemples :

a) Soit la suite $u = (n^2 + n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$. On a : $u_0 = \dots, u_1 = \dots, u_2 = \dots, u_9 = \dots$

Remarque : cette suite est définie par une relation fonctionnelle du type " $u_n = f(n)$ ". On dit qu'elle est définie **de façon explicite**.

b) La suite v dont le terme d'indice n est la plus grande solution réelle de $x^2 - x - n = 0$.

On a : $v_0 = \dots, v_1 = \dots, v_6 = \dots$

Remarque : les termes de cette suite sont définis comme des solutions d'équations. On dit que la suite est définie **de façon implicite**.

c) La suite de Fibonacci F est définie par :

On a : $F_0 = \dots, F_1 = \dots, F_2 = \dots, F_9 = \dots$

La suite F est définie **par récurrence**. Pour déterminer la valeur d'un terme, on a besoin de

Définition

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Cet ensemble est muni des opérations suivantes :

- **addition** : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- **multiplication par un réel** : $\lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- **produit** : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

avec u et v deux suites réelles, λ un réel.

Muni de l'addition et du produit par un réel, on peut faire des **combinaisons linéaires** de suites, autrement dit : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un **\mathbb{R} -espace vectoriel**.

On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'un **ordre partiel** : si u et v sont deux suites, on dira que $u \leq v$ lorsque :

Remarque : dans \mathbb{R} , l'ordre est **total**, pour deux réels x, y on a $x \leq y$ ou $y \leq x$ (ou les deux si $y = x$). En revanche, pour les suites, on parle d'ordre **partiel** car on peut n'avoir ni $u \leq v$ ni $v \leq u$. Par exemple :

Définition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On dit que u est **majorée** lorsque $u(\mathbb{N})$ l'est, autrement dit lorsque :
- De façon analogue, on définit les suites **minorées** ainsi que les suites **bornées**.

Exercice

Justifier que la suite $\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Réponse

Il faut trouver

Proposition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

3 Exemples de référence

3.1 Approximation décimale d'un réel

Parmi les réels, ceux dont l'écriture décimale s'arrête (c'est-à-dire n'a que des 0 à partir d'un certain rang) s'appellent les **nombre décimaux**. Ce sont les rationnels dont la forme irréductible ne comporte que des puissances de 2 et de 5 au dénominateur.

Ces nombres servent naturellement à approcher les réels dont l'écriture décimale ne s'arrête pas.

Exemples : $\frac{1}{3} \simeq \dots$ et $\pi \simeq \dots$

Il faut faire attention lorsqu'on donne ce type d'approximation car

Définition

Soit x un réel.

- L'approximation décimale de x est la suite
- Si on note (x_n) le terme général de l'approximation décimale de x , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dots \leq x < \dots$$

Exemple : les premiers termes de l'approximation décimale de π sont 3 ; 3,1 ; 3,14 ; 3,141 ; 3,1415

Remarque : les nombres décimaux sont les réels pour lesquels l'approximation décimale est **stationnaire**. Autrement dit :

3.2 Suites arithmétiques, géométriques

Définition

Soit r un réel et u une suite. On dit que u est arithmétique de raison r si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} =$

Proposition

Soit u une suite et r un réel.

Dire que u est arithmétique de raison r est équivalent à dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

Définition

Soit q un réel et u une suite. On dit que q est géométrique de raison q si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} =$

Proposition

Soit u une suite et q un réel.

Dire que u est géométrique de raison q est équivalent à dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

3.3 Suites Arithmético-géométriques

Définition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe des réels a et b tels que :

Exemples :

- a) La suite définie par $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n + 4$ est arithmético-géométrique.
Ses premiers termes sont :
- b) La suite définie par $v_0 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -v_n + 4$ est arithmético-géométrique.
Ses premiers termes sont :
- c) La suite définie par $w_0 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 2w_n + 1$ est arithmético-géométrique.
Ses premiers termes sont :

Méthode

Pour étudier une suite arithmético-géométrique « $u_{n+1} = au_n + b$ » avec $a \neq 1$:

1. on détermine le **point fixe** de la fonction $x \mapsto ax + b$, soit $r =$;
2. la suite $(u_n - r)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a ;
3. on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n =$

Exemple : on reprend la suite w vue précédemment. Que vaut w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$?

Démonstration

Il faut prouver que

3.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **récurrente linéaire d'ordre 2** lorsqu'il existe des réels a et $b \neq 0$ tels que :

Exemple : la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

Méthode

Pour étudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2 « $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ » avec $b \neq 0$:

1. on considère l'équation caractéristique :
2. La forme de u dépend des solutions de (E_c) :
 - si (E_c) a deux racines réelles r_1 et r_2 alors
 - si (E_c) a une racine double r alors
 - si (E_c) a deux complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et alors
3. Les valeurs de λ et μ sont déterminées grâce

Remarques :

1. dans la méthode on a précisé $b \neq 0$ car
2. (E_c) est une équation du second degré à coefficients réels, d'où les trois situations $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.

Exemple : donner l'expression du terme général de la suite de Fibonacci en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3.5 Suite extraite

Définition

Soit u une suite. On appelle **suite extraite de u** toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ou $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction croissante.

Exemple : soit $u = (n^2 + n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Les premiers termes de u sont :
- la suite extraite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ a pour premiers termes :
C'est la suite
- La suite des termes d'indices impairs de u est :

4 Variations des suites

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- On dit que u est **croissante** lorsque
- On dit que u est **décroissante** lorsque

On dit que u est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarques :

- Une suite peut être croissante, décroissante, ou ni l'un ni l'autre. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition, on obtient les définitions d'une suite strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone.

En pratique, on a plusieurs méthodes pour étudier le sens de variations d'une suite u :

- méthode 1 : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

— méthode 2 : comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

— méthode 3 : pour une suite définie de façon explicite « $u_n = f(n)$ » alors si f est (strictement) monotone alors u a la même (stricte) monotonie.

Remarque : l'absence d'ordre dans \mathbb{C} a pour conséquence qu'on ne parlera pas de variations pour une suite de complexes.

Exercice

Quelles sont les variations possibles d'une suite géométrique?

Réponse

Soit

5 Limite d'une suite

Définition

Soit u une suite et ℓ un réel. On dit que la limite de u est ℓ ou que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ (lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque :

On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

Remarque : dans la définition " $u_n \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$ " peut être remplacé par " $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ ". En pratique c'est ce qui est le plus comode à manipuler.

Exemple : On considère la suite $u = \left(\frac{2n+3}{n+4}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

- On conjecture (éventuellement à l'aide de Python) que la limite de u est $\ell = \dots$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \ell| =$
- Trouver un rang $N \in \mathbb{N}$ à-partir duquel les termes de la suite vérifient $|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$.

- Soit $\varepsilon > 0$. Trouver un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ à-partir duquel les termes de la suite vérifient $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

- Conclure.

Définition

Soit u une suite.

- On dit que la limite de u est $+\infty$ (lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque :

- De façon analogue, on dit que la limite de u est $-\infty$ (lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque :

Exemple : On considère la suite $v = (3n^2 + 7)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a) Trouver un rang N à-partir duquel tous les termes de v sont supérieurs à 1000.

- b) Prouver que $v_n \rightarrow +\infty$

Définition

On dit qu'une suite u **converge** (vers un réel ℓ) lorsqu'elle a une limite finie. On dit qu'elle **diverge** sinon ; c'est-à-dire si elle tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou qu'elle n'admet pas de limite.

Exemple : la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente car elle n'a pas de limite.

Exercice

Que dire de la limite d'une suite arithmétique ? d'une suite géométrique ?

6 Propriétés des suites ayant une limite

Les propositions qui suivent sont « de bon sens », ce qui ne dispense pas de les démontrer ! (plusieurs preuves seront faites en TD, les autres sont en exercice).

Proposition

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

Proposition

Une suite convergente est bornée.

Proposition

Soit u et v deux suites ayant des limites.

- i. Si $u < v$ alors
- ii. Si $\lim u < \lim v$ alors

Proposition

Soit u une suite ayant une limite. Les suites extraites de u

Remarque : la réciproque peut être très utile.

7 Déterminer la limite d'une suite

7.1 Par opérations sur les limites (somme, produit, quotient)

$\lim u$	$\lim v$	$\lim u + v$	$\lim u - v$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}$		
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 = \pm\infty$		
$+\infty$	$+\infty$		
$-\infty$	$-\infty$		
$+\infty$	$-\infty$		

$\lim u$	$\lim v$	$\lim u \times v$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}$	
$l_1 \in \mathbb{R}^*$	$l_2 = \pm\infty$	
$\pm\infty$	$\pm\infty$	
$\pm\infty$	0	

$\lim u$	$\lim v$	$\lim \frac{u}{v}$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}^*$	
$l \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	
$\pm\infty$	$\pm\infty$	
$l \in \mathbb{R}^*$	0^+ ou 0^-	
0	0^+ ou 0^-	

Remarques :

- une F.I. signifie que toutes les situations sont envisageables : convergence vers un réel, divergence vers $\pm\infty$ ou pas de limite. (On verra des exemples en TD).
- On ne rappelle pas dans ce chapitre les règles pour la composition des limites (qui, bien entendu, s'appliquent). *Quelles sont les F.I. liées à la composition ?*

Démonstration

On démontre deux des formules : soit u et v sont des suites qui convergent vers des réels ℓ_1 et ℓ_2 montrons que $u + v$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$ et que uv converge vers $\ell_1\ell_2$.

- Montrons que $u + v \rightarrow \ell_1 + \ell_2$. Soit $\varepsilon > 0$.

On veut trouver un rang N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait $|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq \varepsilon$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| =$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_1$ donc il existe un rang N_1 à partir duquel $|u_n - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

De façon analogue, il existe un rang N_2 à partir duquel $|v_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a $|u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leq \varepsilon$ et donc $|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq \varepsilon$.

Finalement, on a bien prouvé que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$.

- Montrons que $uv \rightarrow \ell_1\ell_2$. Soit $\varepsilon > 0$.

7.2 Par comparaison à d'autres suites

Théorème

Soient u, v et w trois suites telles que $u \leq v \leq w$.

Si u et w ont la même limite (finie ou pas) alors v admet également cette limite.

Remarques :

a) Ce théorème est connu sous le nom de "Théorème des gendarmes"

b) Si $\lim u = +\infty$ alors il n'y a pas besoin de w . De même si $\lim w = -\infty$ alors u ne sert pas.

Exemple : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n}$

Théorème

Soit u une suite croissante. Alors, $\lim u$ existe et on a :

i. si u est majorée alors $\lim u = \text{Sup}\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$.

ii. Sinon $\lim u = +\infty$.

Remarque : On a l'analogie pour une suite décroissante. Si v est décroissante, soit elle est minorée et alors elle converge, soit elle diverge vers $-\infty$, dans les deux cas $\lim v = \text{Inf}\{v_n/n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple : soit $u = \left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$

a) Etudier les variations de u .

b) Prouver que u est bornée.

c) En déduire que u converge.

d) Prouver que $u \rightarrow 0$. (On pourra commencer par montrer qu'à partir d'un certain rang, u est inférieure à une suite géométrique bien choisie)

Proposition

Soit u une suite.

Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

7.3 Théorème des suites adjacentes

Définition

On dit que u et v sont des **suites adjacentes** lorsque :

- u est croissante ;
- v est décroissante ;
- $\lim v - u = 0$.

Théorème

Soient u et v deux suites adjacentes. Alors u et v convergent vers un même réel ℓ .

De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$.

Démonstration

u est croissante, elle admet donc une limite : soit $+\infty$, soit un réel.

De même, v admet une limite : $-\infty$ ou un réel.

On sait que $\lim v - u = 0$; cette limite n'est pas une forme indéterminée. On déduit par opérations sur les limites que les limites de u et v sont réelles et égales. Notons ℓ cette limite commune. Comme $\ell = \text{Sup}\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$.

De façon analogue, $\forall n \in \mathbb{N}, \ell \leq v_n$. ■

7.4 Cas particulier des suites récurrentes

Proposition

Soit u une suite définie par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ » avec f une fonction continue.

Si u converge vers un réel ℓ alors ℓ est un **point fixe** de f (autrement dit : ℓ est une solution de $f(x) = x$).

8 Brève extension aux suites complexes

Définition

- Une suite complexe est une application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$.
- Etant donné une suite complexe u , on notera $\text{Re}(u)$ la suite $(\text{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$. De même $\text{Im}(u)$ désigne la suite $(\text{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$. $\text{Re}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont des suites de réels.

Puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans \mathbb{C} , il n'y a pas de notion de suite majorée, minorée, croissante ou décroissante. Il y a néanmoins une **distance** dans \mathbb{C} (le module) qui permet de définir la notion de suite bornée.

Définition

Soit u une suite de complexes. On dit que u est **bornée** lorsque :

Cette distance permet également de définir la notion de convergence pour les suites de complexes :

Définition

Soit u une suite de complexes, $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que u **converge vers** ℓ lorsque :

Proposition

Soit u une suite de complexe et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On a :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right) \iff \left(\quad \quad \quad \text{et} \quad \quad \quad \right)$$

Ce résultat est important car il permet (facilement) de déduire du travail qui a été fait sur les suites de réels convergentes des propriétés sur les suites de complexes convergentes. Par exemple :

- Compatibilité avec la somme, le produit :
- Compatibilité avec les combinaisons linéaires :
- Compatibilité avec le quotient (avec des précautions) :
- Si la suite u est convergente alors la suite u est

Attention :

9 Applications des suites

Lorsqu'on ne sait pas calculer de façon exacte une quantité, on cherche souvent à construire une suite qui converge vers cette quantité (on parle alors de *résolution numérique*).

On donne ici les principes généraux de quelques applications, elles seront revues dans des chapitres ultérieurs ou bien dans le cours d'informatique.

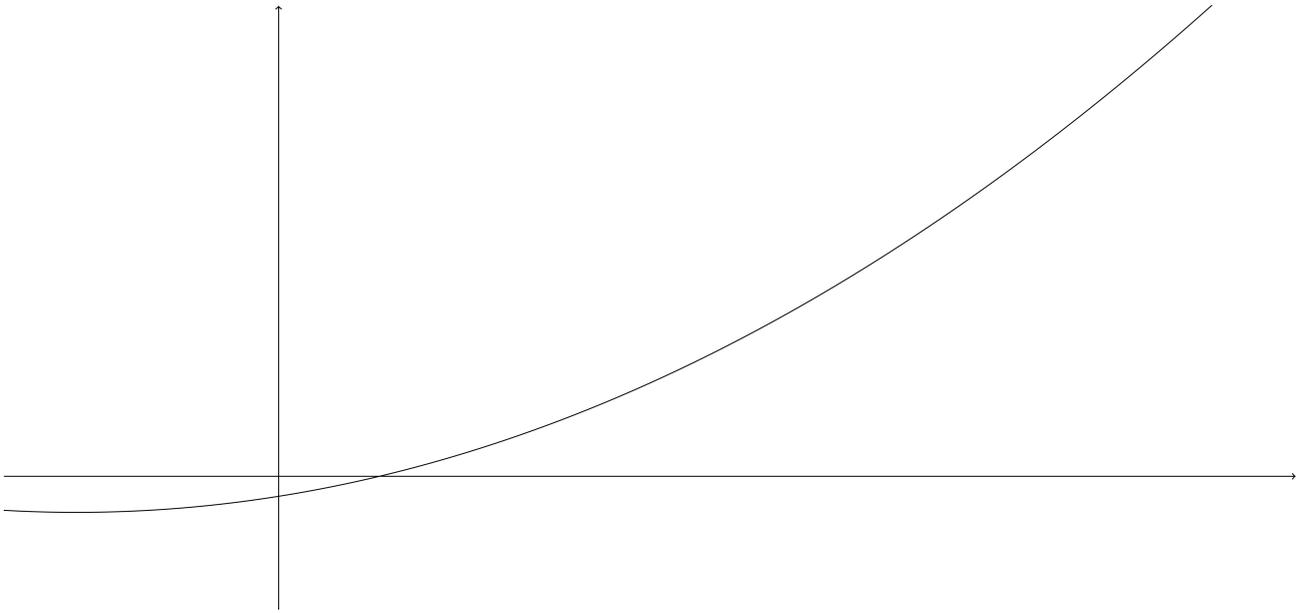
9.1 Approcher la solution de $f(x) = 0$

On sait que $f(x) = 0$ a une unique solution $\alpha \in [a; b]$, on veut approcher α avec une précision $\epsilon > 0$

9.1.1 Algorithme de la dichotomie

Supposons que f soit monotone et que l'on sache que $\alpha \in [a; b]$. On construit une suite d'intervalles $[a_n; b_n]$ qui contiennent tous α et qui sont de plus en plus petits :

9.1.2 Méthode de Newton



9.2 Approcher la valeur d'une intégrale avec la méthode des rectangles

On cherche à approcher $\int_a^b f(x) dx$

