

# Chapitre 9 : Matrices

## Du vocabulaire pour commencer

On appelle **structure algébrique** un ensemble muni d'opérations qui vérifient certaines caractéristiques. L'intérêt de l'étude de ces objets est que les propriétés qui sont démontrées sont relatives à la structure algébrique et non au contexte de l'ensemble en question. Par analogie, ce serait comme étudier les propriétés de tous les objets qui ont des roues : tout résultat s'appliquerait ensuite indifféremment aux voitures, aux motos, aux vélos, aux brouettes...

La seule structure algébrique dont l'étude soit au programme est celle d'**espace vectoriel**. Les autres (la plupart moins sophistiquées) apparaissent furtivement dans le vocabulaire que nous utiliserons. On va, en guise de vulgarisation, exposer l'idée qu'il faut se faire de ces structures.

- $\mathbb{Z}$  est stable par  $+$ , il y a un élément neutre (0), et chaque entier a un opposé : on dit que c'est un **groupe** (additif).
- $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont également des groupes additifs ; privés de 0 ce sont aussi des groupes multiplicatifs. Lorsqu'un ensemble possède ces deux qualités, on dit que c'est un **corps**.
- Un espace vectoriel est un ensemble stable par **combinaison linéaire**. Nous avons déjà croisé des exemples d'espaces vectoriels : les vecteurs du plan, de l'espace, les ensembles de fonctions, les suites, les polynômes.  
Pour faire une combinaison linéaire, on a besoin de deux types d'objets : les **vecteurs** (qui sont les éléments de l'ensemble en question) et les coefficients de la combinaison linéaire qu'on appelle **scalaires**, ils appartiennent au corps sur lequel on construit la structure d'espace vectoriel.

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , soit le corps des scalaires.  
 $n, p$  et  $q$  désigneront des entiers naturels non nuls.

## 1 Opérations dans les ensembles de matrices

### 1.1 Combinaisons linéaires dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

#### Définition

- Une matrice est un tableau de nombres.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est l'ensemble des matrices ayant  $n$  lignes et  $p$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Une telle matrice est dite de taille  $(n, p)$  ou  $n \times p$ .
- Les éléments de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont notés de la forme  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$ .
  
- Certains cas particuliers disposent d'un vocabulaire spécifique : on parle de **matrice colonne** quand  $n=1$ , de **matrice ligne** quand  $p=1$  et de **matrice carrée** quand  $n=p$ . Dans ce dernier cas, on n'écrit pas  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$  mais simplement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Remarque :** une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  a  $np$  coefficients.

**Exemples :** une matrice ligne, une colonne et une matrice carrée :

### Définition

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de même taille  $(n, p)$ ,  $\lambda$  un scalaire.

- $A + B$  est la matrice de taille  $(n, p)$  obtenue en additionnant les coefficients de  $A$  et  $B$  qui ont même position :

$$(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} + (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$$

- $\lambda A$  est la matrice de taille  $(n, p)$  obtenue en multipliant chaque coefficient de  $A$  par  $\lambda$  :

$$\lambda(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} = (\lambda a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$$

**Remarque :** ayant défini l'addition ainsi que la multiplication par un scalaire, on peut faire des combinaisons linéaires dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Si  $A$  et  $B$  sont des matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , une combinaison linéaire de  $A$  et  $B$  est une matrice de taille  $n \times p$  de la forme :

$$\lambda A + \mu B = \lambda(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} + \mu(b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} =$$

avec  $\lambda$  et  $\mu$  qui désignent des scalaires.

**Exemple :**  $3 \begin{pmatrix} 2+i & 3 & 0 \\ i & -7+i & 5 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2+i \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

### Proposition

Dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,

- l'addition des matrices est **commutative** :
- l'addition des matrices a un **élément neutre** :
- toute matrice  $A$  admet un **opposé** qui vaut

### Remarques :

- toutes les matrices qui interviennent dans les combinaisons linéaires (et donc dans les additions) ont une même taille  $n \times p$  qui est fixée. En particulier, la notion de matrice nulle, souvent notée  $0$ , correspond en fait à « la matrice nulle de taille  $(n, p)$  » ; on note  $0_{n,p}$  si on veut éviter toute ambiguïté.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est donc un groupe additif.

### Définition

On appelle **base canonique** de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  la famille  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$  définie de la façon suivante : pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$ ,  $E_{i,j}$  a tous ses coefficients qui sont nuls, sauf celui en position  $(i, j)$  qui vaut 1.

Les matrices  $E_{i,j}$  sont appelées **matrices élémentaires**.

### Proposition

Toute matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

### Démonstration (cas $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ )

La base canonique de  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$  est :

Soit  $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ , on a  $A =$

L'unicité de cette écriture est évidente. ■

**Remarque :** la notion de **base** sera centrale dans l'étude des espaces vectoriels, au second semestre.

## 1.2 Produit de matrices

### Définition

Soit deux matrices :  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .

La matrice  $C = A \times B$  est la matrice de taille  $(n, q)$  dont les coefficients sont  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p$

**Exemples :**

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$(2 \quad -1 \quad 1)$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

**Remarques :**

1. Le produit des matrices est **non-commutatif** :  $BA$  n'est pas nécessairement égal à  $AB$ .  
Pour des raisons de taille  $BA$  peut même ne pas exister.
2. On peut avoir  $AB = 0$  avec  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ . On dit que le produit matriciel est **non-intègre**.

Le produit des matrices est contre-intuitif à plusieurs niveaux. Il y a quand même des propriétés calculatoires qui le rapprochent du produit de deux nombres :

**Proposition**

Soit  $A, B$  et  $C$  des matrices (dont les tailles permettent de réaliser les produits qui apparaissent dans la suite),  $\lambda$  et  $\mu$  des scalaires.

- i. Le produit des matrices est **bilinéaire** :

$$(\lambda A + \mu B)C = \quad \quad \quad \text{et} \quad A(\lambda B + \mu C) =$$

- ii. Le produit des matrices est **associatif** :  $(AB)C =$

- iii. La multiplication par une matrice nulle donne une matrice nulle.

**Définition**

On appelle **matrice identité de taille  $n$** , notée  $I_n$  la matrice

Le **symbole de Kronecker** est l'application  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \{0; 1\}$  définie par  $(i, j) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , on le note  $\delta_{i,j}$ . Avec ce symbole,  $I_n =$

**Proposition**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On a :  $AI_p = \quad \quad \quad$  et  $I_n A =$

**Démonstration**

Il suffit de faire le calcul.

Pour  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$ , le coefficient en position  $(i, j)$  de  $AI_p$  est  $\sum_{k=1}^p a_{i,k} \delta_{k,j} = a_{i,j}$  et donc  $AI_p = A$ . De façon analogue,  $I_n A = A$ . ■

**Exercice**

Exprimer les matrices élémentaires de  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$  à l'aide du symbole de Kronecker.

**Réponse**

On a  $E_{1,1} =$

Mettons en valeur les lignes et les colonnes dans le produit matriciel :

1. Si  $X$  est une colonne alors  $AX$  est une colonne qui est combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

En effet, si  $A = \left( \begin{array}{|c|} \hline A_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A_2 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline A_p \\ \hline \end{array} \right)$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  alors on a  $AX =$

2. Si l'on considère les colonnes de  $B : B = \left( \begin{array}{|c|} \hline B_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B_2 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline B_q \\ \hline \end{array} \right)$  alors  $AB =$

3. On peut adapter les deux remarques précédentes sur les lignes. Par exemple, si  $A$  est une ligne alors  $AB$  en est également une, qui est combinaison linéaire des lignes de  $B$ .

### Exercice

Soit  $A$  une matrice de taille  $(2, 4)$ .

- a) Par quelle colonne faut-il multiplier  $A$  pour que le vecteur colonne obtenu ait comme coefficients les sommes des coefficients des lignes de  $A$  ?
- b) Par quelle colonne faut-il multiplier  $A$  pour obtenir comme résultat la première colonne de  $A$  ?
- c) Même question pour les autres colonnes de  $A$  ?

## 1.3 Transposition

### Définition

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times p$ .

On appelle **transposée de  $A$** , notée  $A^T$ , la matrice de taille  $p \times n$  obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de  $A$ .

Exemples :  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2+i & \pi \end{pmatrix}^T =$  ;  $(1 \ 2 \ 3)^T =$

**Remarque :** la transposée d'une ligne est une colonne, la transposée d'une colonne est une ligne.

### Proposition

- i. La transposition est **linéaire**, autrement dit :
- ii. La transposition est **involutive**, autrement dit :
- iii. Soit  $A$  et  $B$  des matrices telles que le produit  $AB$  existe. On a  $(AB)^T =$

### Démonstration

i. et ii. sont évidents. Démontrons iii.

Soit  $A$  et  $B$  des matrices telles que le produit  $AB$  existe ; le produit  $B^T A^T$  existe alors aussi.

Si on note  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  et  $B = (b_{j,k})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq q}$ , pour  $(i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$ , le coefficient de  $B^T A^T$  en position  $(k, i)$  est le produit de la  $k$ -ème ligne de  $B^T$  par la  $i$ -ème colonne de

$A^T$  c'est-à-dire  $\sum_{j=1}^p b_{j,k} a_{i,j} = \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k}$  soit le coefficient de  $AB$  en position  $(i, k)$ . ■

## 2 Opérations élémentaires sur les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### Définition

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

On a trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de  $A$  :

- La permutation  $L_i \leftrightarrow L_j$  ;
- La dilatation  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  ;
- La transvection  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ .

De façon symétrique, on dispose des mêmes opérations sur les colonnes, notées :

Une opération élémentaire est donc une application de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Si  $A'$  est l'image de  $A$  par une opération élémentaire, ou par une succession d'opérations élémentaires, on dit que  $A'$  est **équivalente** à  $A$  et on note  $A \sim A'$ .

**Exemple :**  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  est équivalente à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . En effet,

### Proposition

Les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes sont des applications bijectives. Plus précisément :

$$(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = \quad ; \quad (L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} = \quad ; \quad (L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} =$$

**Remarque :** le vocabulaire tel que défini par le programme peut prêter à confusion. Il ne faut pas confondre les opérations élémentaires (sur les lignes ou sur les colonnes) avec les matrices élémentaires (de la base canonique). Dans la suite, nous nous intéressons à ces matrices.

$$\begin{aligned} \text{Exemples : } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= & ; & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ & \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = & ; & \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

**Proposition (multiplication à gauche ou à droite par une matrice élémentaire)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On a :

- $A \times E_{i,j} =$
- $E_{i,j} \times A =$

**Remarque :** dans la proposition précédente, il faut faire attention à la taille de  $E_{i,j}$ . Pour pouvoir calculer  $A \times E_{i,j}$  il faut que  $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{K})$ ; pour pouvoir calculer  $E_{i,j} \times A$  il faut que  $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ .

**Démonstration**

On se limite au cas

On a :

**Théorème (Opérations élémentaires et produit matriciel)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Dans la suite,  $i, j$  désignent des éléments de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\lambda$  un scalaire non nul.

Opération élémentaire sur $A$	Produit matriciel qui produit ce résultat

**Démonstration**

On se limite à illustrer l'opération élémentaire

**Définition**

Les matrices qui multiplient  $A$  (à gauche ou à droite), s'appellent **matrices de dilation, de permutation, de transvection**.

### 3 Systèmes linéaires

#### Définition

On appelle système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues les systèmes de la forme :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

avec tous les coefficients  $a_{i,j}$  et les seconds membres  $b_i$  qui sont dans  $\mathbb{K}$ .

Résoudre  $(\mathcal{S})$  c'est trouver tous les  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$  qui satisfont  $\mathcal{S}$ .

**Exemple :** résolvons le système  $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$ .

#### Proposition

On conserve les notations de la définition.

Soit la matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$  et la colonne  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ .

Résoudre  $(\mathcal{S})$  c'est résoudre l'équation  $AX = B$ , d'inconnue  $X$ .

**Remarque :** dans la suite on fera la confusion entre le système  $(\mathcal{S})$  et l'équation matricielle  $AX = B$ .

#### Définition

a) On dit qu'un système qui admet (au moins) une solution est **compatible**. Dans le cas contraire on dit qu'il est **incompatible**.

b) Si tous les seconds membres sont nuls, on dit que le système est **homogène**.

c) Etant donné le système  $AX = B$ , son **système homogène associé** est  $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Remarques :**

a) un système homogène est compatible car

b) On a vu que  $AX$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ . Le système  $AX = B$  est donc compatible si, et seulement si,  $B$  est combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .



### Méthode (Résolution d'un système homogène $AX = 0$ )

1. On applique l'algorithme de Gauss, ce qui revient à multiplier à gauche l'équation  $AX = 0$  par une suite de  $k$  matrices d'opérations élémentaires :  $Z_1, \dots, Z_k$ .
2. On obtient  $Z_k Z_{k-1} \dots Z_1 AX = 0$  avec  $Z_k Z_{k-1} \dots Z_1 A$  qui est une matrice **échelonnée réduite**, c'est-à-dire que sur chaque ligne et sur chaque colonne, tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être un qui vaut 1. Les coefficients non nuls sont les **pivots**.
3. Il y a alors deux cas :
  - Il y a  $p$  pivots et alors  $AX = 0$  admet une unique solution qui est forcément la solution triviale  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .
  - Il y a strictement moins de  $p$  pivots et alors il y a une infinité de solutions obtenues en exprimant les **inconnues principales** en fonctions des **paramètres**.

**Exemples :** Résoudre  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = 0$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} X = 0$

**Remarque :** pour résoudre un système  $AX = B$ , on procède de la même façon que pour un système homogène (c'est d'ailleurs ce que l'on a fait dans l'exemple introductif).

On obtient  $Z_k Z_{k-1} \dots Z_1 AX = Z_k Z_{k-1} \dots Z_1 \times B$  avec la matrice à gauche qui est échelonnée réduite. Il y a alors deux possibilités :

- les éventuelles lignes de 0 à gauche correspondent à un 0 à droite et alors le système est compatible ;
- une ligne de 0 à gauche correspond à un coefficient non nul à droite, cela donne une équation absurde et le système est incompatible.

**Exemple :** résoudre  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Proposition (Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible)**

Soit  $AX = B$  un système compatible, avec  $X_0$  une de ses solutions.

L'ensemble des solutions du système est :

**Démonstration**

On a  $AX = B \iff$

**Remarque :** pour un système compatible, on a donc une unique solution  $X_0$  ou bien une infinité de solutions.

## 4 Calcul dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

### 4.1 Matrices particulières : triangulaires, diagonales, symétriques et antisymétriques

**Définition**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On dit que  $A$  est **diagonale** lorsque :
- On dit que  $A$  est **triangulaire supérieure** lorsque :
- On dit que  $A$  est **triangulaire inférieure** lorsque :
- On dit que  $A$  est **symétrique** lorsque :
- On dit que  $A$  est **antisymétrique** lorsque :

**Exemples :** une matrice diagonale : ; une matrice triangulaire supérieure :

une matrice symétrique : ; une matrice antisymétrique :

### 4.2 Produit de deux matrices carrées

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices,  $AB$  n'existe que si le nombre de lignes de  $B$  vaut le nombre de colonnes de  $A$ . Ce produit existe donc toujours dès lors que  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées de même taille.

Autrement dit : dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  on peut toujours calculer le produit de deux matrices.

**Proposition**

- i  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est stable par produit :
- ii  $I_n$  est l'**élément neutre** pour la multiplication dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

**Démonstration**

i. est une conséquence immédiate de la définition du produit matriciel. On a déjà vu ii. dans le cas plus général d'une matrice  $n \times p$ . ■

### Définition

Soit  $A, B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Soit  $r \in \mathbb{N}$ . On définit les **puissances de  $A$**  par récurrence :

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall r \in \mathbb{N}, A^{r+1} = A^r A$$

- $AB$  et  $BA$  existent mais sont le plus souvent différents. Lorsque  $AB = BA$ , on dit que  $A$  et  $B$  **commutent**.

La formule du binôme a été vue dans le cas des nombres (réels et complexes), elle fonctionne également dans le cas des matrices qui commutent :

### Proposition

Soit  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent, et soit  $r \in \mathbb{N}$ . On a :

$$(A + B)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} A^k B^{r-k}$$

### Démonstration

En exercice (en faisant bien attention à quel moment il est important que  $A$  et  $B$  commutent). ■

**Exemple :** déterminons les puissances de  $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

On observe que  $M = A + 2I_2$  avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  $A$  et  $2I_2$  commutent (car  $I_2$  commute avec toute matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ). On a  $A^0 = I_2$ ,  $A^1 = A$  et pour  $r \geq 2$ ,  $A^r = 0$  (sous-entendu la matrice nulle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ). Il suit que, pour  $r \geq 2$  on a :

$$M^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} A^k (2I_2)^{r-k}$$

### Proposition

Les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et triangulaires inférieures sont stables par produit. Autrement dit, pour des matrices  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

- si  $A$  et  $B$  sont diagonales alors  $AB$  est diagonale ;
- si  $A$  et  $B$  sont triangulaires supérieures alors  $AB$  est triangulaire supérieure ;
- si  $A$  et  $B$  sont triangulaires inférieures alors  $AB$  est triangulaire inférieure.

### Démonstration

Pour le cas triangulaire supérieure :

### 4.3 Matrices inversibles

**Remarque :** qu'appelle-t-on l'*inverse* d'un nombre  $x$  ?

#### Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est **inversible** lorsqu'il existe

**Exemples :**

a) La matrice nulle est-elle inversible ?

b) Prouver que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  est inversible.

#### Définition

On appelle **groupe linéaire** le sous-ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont inversibles. On le note  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

**Remarques :**

a)  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  n'est pas vide car

b) Dans l'introduction de ce chapitre, on a expliqué que l'idée qu'il faut se faire d'un groupe est celle d'un ensemble muni d'une opération tel qu'il existe un élément neutre et tel que chaque élément ait un inverse (ou un opposé, suivant qu'on appelle l'opération une multiplication ou une addition).  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un groupe pour l'addition des matrices (l'élément neutre pour  $+$  est la matrice nulle, chaque matrice a un opposé) ; mais pas pour le produit (il y a un élément neutre :  $I_n$  mais certaines matrices n'ont pas d'inverse).  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  est la partie de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui est un groupe pour le produit.

### Proposition

i.  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  est stable par produit. Autrement dit :

Si  $A$  et  $B$  sont des matrices de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  alors  $(AB)^{-1} =$

ii. Si  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et si  $r \in \mathbb{N}$  alors  $A^r$  est inversible et  $(A^r)^{-1} =$

### Démonstration

Il suffit de

## 4.4 Calcul d'inverse : cas particulier de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$

On a vu des propriétés de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  mais une question demeure en suspens : comment savoir si une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible ? Ce problème est intimement lié à la résolution des systèmes linéaires ; ce sera l'objet de la fin du chapitre.

Le paragraphe qui suit traite le cas  $n = 2$ , on y note  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

### Définition

On appelle **déterminant** de  $M$ , noté  $\det(M)$  ou encore  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  le nombre  $ad - bc$ .

**Exemple :**  $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} =$

### Proposition

$M$  est inversible si, et seulement si

L'inverse de  $M$  est alors la matrice  $M^{-1} =$

### Démonstration

Calculons :

## 4.5 Recherche d'inverse dans le cas général

Dans ce paragraphe,  $A$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont on cherche à décider l'inversibilité ;  $X$  est une colonne de taille  $n$ . Toutes les colonnes qu'on considérera seront de taille  $n$  (on omettra de le préciser pour alléger les notations).

### Lemme

Si  $A$  est inversible à droite, alors  $A$  est inversible. Autrement dit :

### Démonstration

Supposons qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $AB = I_n$ . Il nous faut montrer que  $BA = I_n$ ; raisonnons en deux étapes : prouvons qu'il existe  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $CA = I_n$  puis,  $C = B$ .

- Soit  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Considérons l'équation  $XA - \alpha I_n = 0_{n,n}$  d'inconnues  $X$  et  $\alpha$ . Il s'agit d'un système linéaire de  $n^2$  équations à  $n^2 + 1$  inconnues. Ce système est homogène donc compatible, il a donc une infinité de solutions. Soit  $(X_0; \alpha_0)$  une de ses solutions non triviales. Si on avait  $\alpha_0 = 0$  alors on aurait  $X_0 A = 0_{n,n}$ . En multipliant à droite par  $B$  il viendrait  $X_0 = 0_{n,n}$  ce qui est absurde car on a supposé que  $(X_0; \alpha_0)$  est non triviale; on a donc  $\alpha_0 \neq 0$ .  
On a :  $X_0 A - \alpha_0 I_n = 0_{n,n} \iff X_0 A = \alpha_0 I_n \iff (\frac{1}{\alpha_0} X_0) A = I_n$ .  
En prenant  $C = \frac{1}{\alpha_0} X_0$  on a bien un inverse à gauche de  $A$ .
- Si  $CA = I_n$  alors, en multipliant à droite par  $B$  on a :  $CAB = B \iff C = B$ .

Finalement, si  $AB = I_n$  alors  $BA = I_n$  et donc  $B$  est bien l'inverse de  $A$ . ■

### Théorème

$A$  est inversible si, et seulement si,  $AX = B$  a une solution pour toute matrice colonne  $B$ .

### Démonstration

On procède par double implication.

- Supposons que  $A$  soit inversible. Pour toute colonne  $B$ ,  $A^{-1}B$  est solution de  $AX = B$ .
- Réciproquement, supposons que  $AX = B$  a une solution pour toute colonne  $B$ .

On a donc une solution pour  $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , on l'appelle  $C_1$  et on a  $AC_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

De façon analogue, soit  $C_2$  une solution de  $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . On procède ainsi jusqu'à

créer  $C_n$  et on considère la matrice  $B$  dont les colonnes sont  $(C_1 C_2 \dots C_n)$ .

Les colonnes de  $AB = A(C_1 \dots C_n)$  sont donc celles de  $I_n$  et donc  $B$  est l'inverse à droite de  $A$ . D'après le lemme,  $B$  est donc l'inverse de  $A$  qui est bien inversible.

On vient de voir que  $A$  est inversible si, et seulement si, pour toute colonne  $B$ ,  $AX = B$  admet une unique solution et que cette solution est alors  $A^{-1}B$ . On va utiliser cela pour trouver  $A^{-1}$  :

### Méthode (Pour déterminer l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ )

1. On applique l'algorithme de résolution à  $AX = B$  avec  $B = (b_i)$ .
2. On obtient  $Z_k \dots Z_1 AX = Z_k \dots Z_1 B$  avec  $Z_k \dots Z_1 A$  qui est échelonnée et réduite, notons la  $A'$ .
3. Il y a alors deux possibilités :
  - Si  $A' = I_n$  alors  $A$  est inversible, le système  $AX = B$  a pour solution  $X = Z_k \dots Z_1 B$  et on obtient  $A^{-1}$  en lisant les coefficients du second membre;
  - sinon,  $A$  n'est pas inversible.

**Exemple :** Appliquons la méthode d'inversion à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} & (L_2 \leftrightarrow L_3) \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ b_3 \\ b_1 + b_2 - b_3 \end{pmatrix} & (L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2, L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\ &\iff X = \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ b_3 \\ b_1 + b_2 - b_3 \end{pmatrix} & (L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2, L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{aligned}$$

On en déduit que le système  $AX = B$  a toujours une solution, donc  $A$  est inversible.

De plus, sa solution est  $A^{-1}B = \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ b_3 \\ b_1 + b_2 - b_3 \end{pmatrix}$  donc  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Remarque :** on peut reformuler la méthode précédente, en mettant en avant les opérations élémentaires plutôt que la résolution d'un système :

#### Méthode

Pour décider si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible et, le cas échéant déterminer son inverse :

1. On considère la matrice augmentée  $(A|I_n)$  ;
2. On applique à cette matrice augmentée l'algorithme de Gauss qui échelonne et réduit  $A$  en  $A'$ , on obtient alors :  $(A'|E)$  et il y a deux possibilités :
  - si  $A' \neq I_n$  alors  $A$  n'est pas inversible ;
  - si  $A' = I_n$  alors  $E$  est l'inverse de  $A$ .

**Remarque :**  $E$  est le produit des matrices élémentaires qui a été introduit en fin de paragraphe 3.1.

#### Exercice

Appliquer la méthode précédente à la matrice  $A$  de l'exemple précédent.