

Chapitre 2 : calculer dans \mathbb{C}

Notations : dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1 Généralités sur les complexes

1.1 Forme algébrique

Définition

- On note i un nombre, non réel, qui vérifie $i^2 = -1$.
- On appelle **nombre complexe** les nombres de la forme $z = a + ib$ avec a et b des réels. On dit alors que a est la **partie réelle** de z et que b est sa **partie imaginaire**; on les note respectivement $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} .
- Pour un complexe z , l'écriture $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ s'appelle la **forme algébrique** de z , cette écriture de z est unique.

Exemples :

Remarques :

a) Tout réel x est un nombre complexe :

Une différence importante avec \mathbb{R} : il n'y a **pas de relation d'ordre** dans \mathbb{C} .

b) **Attention :** une partie imaginaire est un nombre réel.

c) L'unicité de la forme algébrique signifie que, si z et z' sont deux complexes on a :

$$(z = z') \iff (\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z'))$$

Méthode (Pour montrer que deux complexes z et z' sont égaux)

Remarque : il y a une correspondance bijective entre \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 . On connaît d'autres correspondances bijectives entre \mathbb{R}^2 et des ensembles : lesquelles ?

Définition

Soit z un complexe.

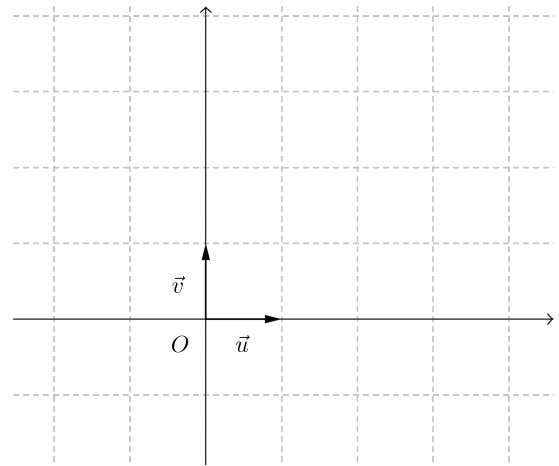
- On dit que le point M du plan de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ est l'**image** de z dans le plan; réciproquement, on dit que z est l'**affixe** du point M et on notera $M(z)$.
- De façon analogue, on dit que z est l'**affixe** du vecteur $\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) \end{pmatrix}$.

Exemples :

- Représenter les points $A(2 + 3i)$ et $B(3 - i)$.
- Que des dire des complexes dont l'image est sur l'axe des ordonnées ?

- Où sont situées les images des complexes réels ?

- Représenter $\Gamma = \{M(z)/\text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}$.

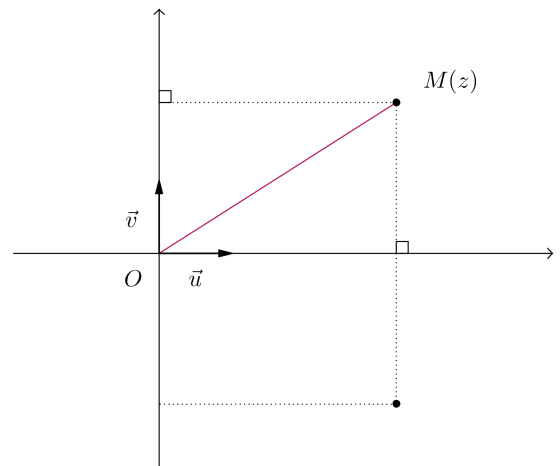


Remarque : le plan nous permet donc de représenter \mathbb{C} . On parle de **plan complexe**.

Définition

Soit $z = a + ib$ un complexe sous forme algébrique, $M(z)$ son image dans le plan complexe.

- i. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté \bar{z} défini par :
- ii. Graphiquement, l'image de \bar{z} dans le plan complexe est
- iii. On appelle **module** de z , et on note $|z|$, la distance OM , c'est-à-dire la norme de \vec{OM} .
On a :
- iv. Si $z \neq 0$, un **argument** de z désigne une mesure en radians de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{OM}) .



Remarque : pour un complexe non nul z , l'argument de z est défini à un multiple de 2π près (il en existe une infinité). Parmi les arguments de z , on appelle **argument principal** celui qui est dans $] -\pi; \pi]$, on le note $\text{Arg}(z)$.

Proposition

Soit z un complexe.

- a) $|\bar{z}| = |z|$.
- b) Si $z \notin \mathbb{R}^-$, $\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z)$.

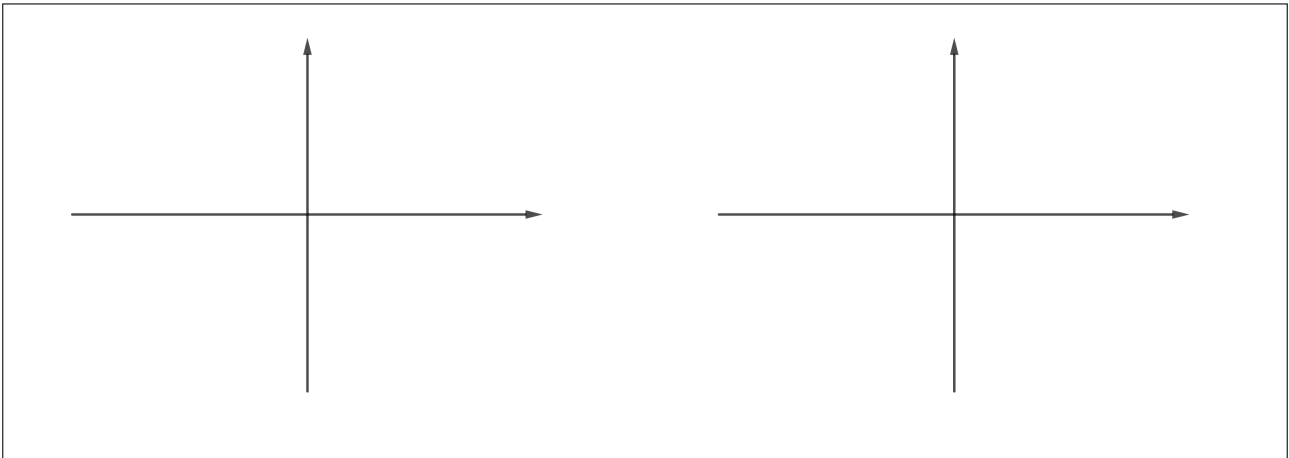
Démonstration

Ces deux résultats sont une conséquence directe des définitions géométriques de la conjugaison, du module et de l'argument. Par exemple, pour a) :

Remarque : pour b) on a du préciser $z \notin \mathbb{R}^-$ car

Exercice

Dans le plan complexe, représenter $\Lambda = \{M(z)/1 < |z| \leq 2\}$ et $\Pi = \{M(z)/\text{Arg}(z) \in [0; \frac{\pi}{6}]\}$.

**1.2 Opérations dans \mathbb{C}** **Proposition**

L'addition et la multiplication dans \mathbb{R} se prolongent *naturellement* à \mathbb{C} . Ainsi, pour tous complexes z et z' de formes algébriques $z = a + ib$ et $z' = c + id$ on a :

- $z + z' =$
- $zz' =$

Exemples :

1. $(3 + 2i)^2 =$
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(3 + i)z - 2i = 3z - 1$.

Proposition

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. La distance AB vaut $|z_B - z_A|$.

Démonstration

soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

D'une part, la distance AB vaut :

D'autre part, les coordonnées cartésiennes du vecteur \overrightarrow{AB} sont :

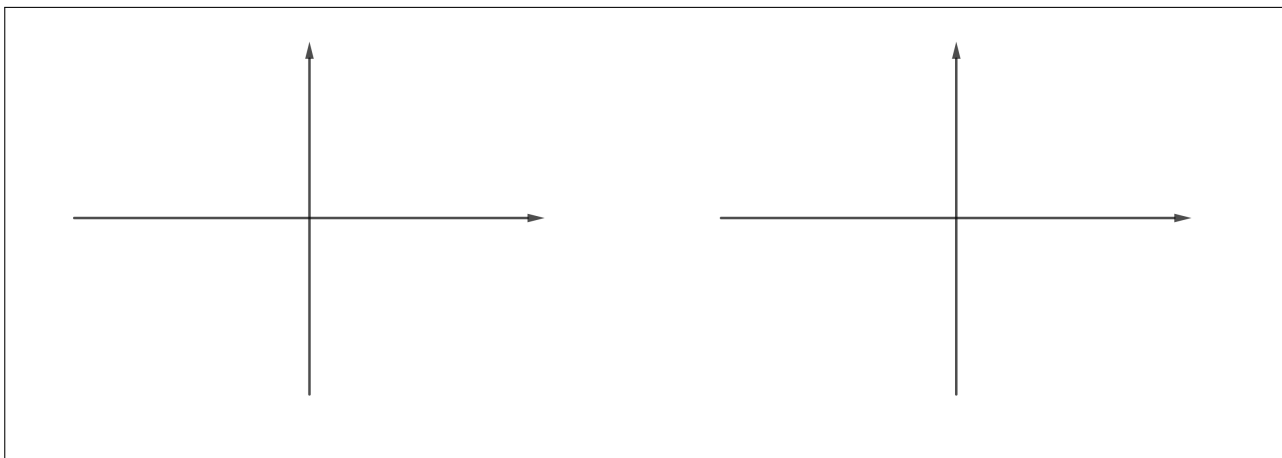
On en déduit que l'affixe complexe de ce vecteur est :

Soit, en faisant apparaître les affixes de A et B :

Finalement,

Exercice

Dans le plan complexe, représenter $\Sigma = \{M(z)/|z - 1 - i| = 1\}$ et $\Theta = \{M(z)/|z + 2i + 1| < 1\}$.



1.3 Propriétés du module et de l'argument

Proposition

Soit z un complexe. On a $z\bar{z} = |z|^2$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Remarque : en particulier, pour tout complexe z , le nombre $z\bar{z}$ est un réel (positif). Cela permet de trouver la forme algébrique de l'inverse d'un complexe non nul, ou d'une fraction.

Méthode (Pour trouver la forme algébrique d'une fraction)

Exemple : Montrer que $\frac{1+i}{1-i}$ est imaginaire pur.

Proposition (Propriétés de la conjugaison)

Soit z et z' deux complexes. On a :

a) $\overline{\bar{z}} = z$; $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

b) La conjugaison est compatible avec les opérations :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \quad \text{et, si } z' \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Proposition (Le module est compatible avec la multiplication et la division)

Soit z et z' deux complexes. On a :

- a) $|zz'| =$
- b) Si $z' \neq 0$, $|\frac{z}{z'}| =$
- c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| =$

Démonstration

On se limite au produit.

Remarque : Le module n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction :

Proposition (Inégalité triangulaire)

Soit z et z' deux complexes. On a : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Démonstration

Soit z et z' deux complexes. On va raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned}
 (\star) : |z + z'| \leq |z| + |z'| &\iff |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 && \text{(possible car)} \\
 &\iff (z + z')\overline{(z + z')} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| \\
 &\iff zz' + \bar{z}z' \leq 2|z||z'|
 \end{aligned}$$

Or, $zz' + \bar{z}z' = 2\text{Re}(z\bar{z}')$ d'où : $(\star) \iff \text{Re}(z\bar{z}') \leq |z||z'|$.

On a $|z||z'| = |z||\bar{z}'| = |z\bar{z}'|$; la dernière inégalité devient $\text{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'|$ qui est toujours vraie.

Par équivalences, l'inégalité triangulaire est donc démontrée.

Remarque : le cas d'égalité se produit lorsque z et z' ont le même argument principal. Dans la démonstration, cela revient à avoir $\text{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'|$ qui se produit si, et seulement si, $z\bar{z}' \in \mathbb{R}^+$. Nous verrons dans un prochain chapitre sur les complexes que l'argument d'un produit est la somme des arguments et on pourra conclure.

2 Nombres complexes de module 1

2.1 Ensemble \mathbb{U}

Définition

On appelle \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes dont le module est 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

Exemples :

1. $|1 + 2i| = \sqrt{5} \neq 1$ donc $1 + 2i \notin \mathbb{U}$.
2. $i \in \mathbb{U}$, $-i \in \mathbb{U}$, $1 \in \mathbb{U}$, $-1 \in \mathbb{U}$.
3. $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}$. En effet,

Géométriquement, \mathbb{U} correspond
 qui est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont de la forme

Proposition

- Soit $z \in \mathbb{U}$, $M(z)$ son image dans le plan complexe.
- Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.
 - θ est un **argument** de z , c'est une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
 - Si l'on rajoute la condition $\theta \in]-\pi; \pi]$ alors θ devient unique, c'est l'**argument principal** de z , on le note $\text{Arg}(z)$.

Exemples :

- $1 = 1 + 0i = \cos(0) + \sin(0)i$ et donc $\text{Arg}(1) = \quad .$
- $\text{Arg}(i) = \quad ; \text{Arg}(-1) = \quad ; \text{Arg}(-i) = \quad .$
- $j = \quad$ donc $\text{Arg}(j) = \quad .$

Proposition

\mathbb{U} est stable par produit :

Démonstration

Soit

Exercice

Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto \cos(\theta) + i \sin(\theta) \end{cases}$ vérifie : $\forall(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2, f(\theta) \times f(\phi) = f(\theta + \phi)$.

Réponse

.

Cette **propriété fonctionnelle** est celle de

Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **exponentielle** de $i\theta$ le nombre $e^{i\theta} =$

Les propriétés calculatoires de \exp découlant de sa propriété fonctionnelle, l'exponentielle complexe possède les mêmes :

Proposition

Soit $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

- a) $e^{i\theta} \times e^{i\phi} =$ b) $\frac{1}{e^{i\theta}} =$ c) $(e^{i\theta})^n =$ d) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\phi}} =$

Remarque : la preuve est laissée en exercice. (C'est sans difficulté mais formateur pour la rédaction).

2.2 Formules d'Euler et de Moivre

Proposition (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration

Par exemple, pour

Proposition (Formule de Moivre)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \iff (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

2.3 Application : linéarisation d'expressions trigonométriques

Il s'agit de transformer une expression de la forme $\cos^n(x)$ (ou $\sin^n x$) en une somme de $\cos(kx)$ et de $\sin(kx)$.

Méthode (Linéariser une expression trigonométrique)

1. on utilise la formule d'Euler pour exprimer l'expression trigonométrique à l'aide de l'exponentielle complexe ;
2. on développe la puissance (grâce à la formule du binôme de Newton) ;
3. on utilise les propriétés de l'exponentielle puis on regroupe les termes « qui se ressemblent » ;
4. on utilise Euler faire apparaître des expressions trigonométriques à la place des exponentielles complexes.

Exemple : Pour $x \in \mathbb{R}$, linéarisons $\cos^3 x$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x)^3 = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)}$.

Remarque : on manipule une expression réelle, il ne doit donc pas rester de i à la fin.

On peut faire le "contraire". Par exemple, exprimons $\sin(3x)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et $\sin x$: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(3x) = \text{Im}(e^{3ix}) = \text{Im}((e^{ix})^3) = \text{Im}((\cos x + i \sin x)^3)$.

Après calculs, il vient : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sin(3x) = 3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x)}$.

3 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Théorème

Soit z un complexe non nul.

z peut être écrit de façon unique sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi]$.

Cette expression est la **forme exponentielle** du complexe z .

On a alors : $r = |z|$ et $\theta = \text{Arg}(z)$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Le complexe $\frac{z}{|z|}$ a pour module 1. Donc, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \iff z = |z|e^{i\theta}$.

L'unicité tient à l'unicité du module ainsi qu'à l'unicité de l'argument principal. ■

Remarque : en pratique, si r, ρ, θ et ϕ sont des réels (avec r et ρ strictement positifs) alors

$$re^{i\theta} = \rho e^{i\phi} \iff \begin{cases} \rho = r \\ \theta = \phi + k2\pi \text{ (avec un certain } k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Méthode (Prouver l'égalité de deux complexes non nuls avec la forme exponentielle)

On vérifie qu'ils ont même module et que leurs arguments correspondent au même angle, c'est-à-dire qu'ils sont congrus modulo 2π .

Cela signifie que deux complexes z et z' sont égaux si, et seulement si, leurs modules et leurs arguments principaux sont égaux.

Méthode (Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle)

- si l'argument principal est évident, il ne reste qu'à calculer le module.
- Sinon,
 1. on calcule le module de z ;
 2. on factorise la forme algébrique de z par $|z|$;
 3. on identifie $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ (avec $\theta = \text{Arg}(z)$) ;
 4. si θ est un angle remarquable on donne sa valeur exacte.
 5. La forme exponentielle de z est $|z|e^{i\theta}$.

Exemples :

1. Donner la forme exponentielle de $1 + i$.

2. Donner la forme exponentielle de $z = -\sqrt{3}i + 1$.

3. Donner la forme exponentielle de $z = -3 - 7i$.

Remarques :

1. L'écriture intermédiaire $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ est la **forme trigonométrique** de z .
2. Il est facile de passer de la forme exponentielle à la forme algébrique.

Par exemple, $6e^{i\frac{7\pi}{6}} =$

Proposition (Propriétés des arguments)

Soit z et z' deux complexes non nuls. On a :

a) $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) =$

b) $\text{Arg}(zz') =$

c) $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) =$

Démonstration

Pour chaque point, il s'agit d'exploiter l'unicité de la forme exponentielle d'un complexe. Par exemple pour a) :

Remarque : il y a une (petite) erreur dans l'énoncé de la propriété. En effet,

Méthode (Factoriser $\cos(a) \pm \cos(b)$ ou $\sin(a) \pm \sin(b)$ avec l'angle moitié)

1. on écrit la quantité étudiée comme la partie réelle (ou imaginaire) d'une somme d'exponentielles complexes ;
2. on fait intervenir l'angle moitié $\frac{a+b}{2}$ et on écrit $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$;
3. on factorise par $e^{i\frac{a+b}{2}}$;
4. on utilise la formule d'Euler pour la parenthèse ;
5. on conclut.

Exemple : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Transformons $\cos(a) + \cos(b)$ avec la technique de l'angle moitié.