Compléments sur les complexes

Notations : dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Nombres complexes de module 1

1.1 Ensemble $\mathbb{U}$

Définition
On appelle $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes dont le module est 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

Exemples :

1. $|1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{5} \neq 1$ donc $1 + 2\mathrm{i} \notin \mathbb{U}$.
2. $\in \mathbb{U}$, $\in \mathbb{U}$, $\in \mathbb{U}$, $\in \mathbb{U}$.
3. $j = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}$. En effet,

Géométriquement, $\mathbb{U}$ correspond

On en déduit immédiatement :

Proposition
Soit $z \in \mathbb{U}$, $M(z)$ son image dans le plan complexe.
- Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
- θ est **un argument** de z, c'est une mesure de $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.
- Si l'on rajoute la condition $\theta \in]-\pi; \pi]$ alors θ devient unique, c'est **l'argument principal** de z, on le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Exemples :
- $1 = 1 + 0\mathrm{i} = \cos(0) + \sin(0)\mathrm{i}$ et donc $\mathrm{Arg}(1) =$.
- $\mathrm{Arg}(\mathrm{i}) =$; $\mathrm{Arg}(-1) =$; $\mathrm{Arg}(-\mathrm{i}) =$.
- $j =$ donc $\mathrm{Arg}(j) =$.

Proposition
$\mathbb{U}$ est stable par produit :

Démonstration
Soit

Exercice
Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & \cos\theta + i\sin\theta \end{array} \right.$ vérifie : $\forall(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2,\ f(\theta) \times f(\phi) = f(\theta + \phi)$.

Cette **propriété fonctionnelle** est celle de

Définition
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **exponentielle** de $\mathrm{i}\theta$ le nombre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} =$

Les propriétés calculatoires de exp découlant de sa propriété fonctionnelle, l'exponentielle complexe possède les mêmes :

Proposition
Soit $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

i. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} =$ ii. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} =$ iii. $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n =$ iv. $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} =$

Exercice
Démontrez la proposition précédente. *(C'est sans difficulté mais formateur pour la rédaction).*

1.2 Formules d'Euler et de Moivre

Proposition
Formules d'Euler
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2i}$$

Démonstration
Par exemple, pour

Proposition
Formule de Moivre
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \iff \boxed{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)}$$

1.3 Application : linéarisation d'expressions trigonométriques

Il s'agit de tranformer une expression de la forme $\cos^n(x)$ (ou $\sin^n x$) en une somme de $\cos(kx)$ et de $\sin(kx)$.

Méthode
Pour linéariser une expression trigonométrique :

1. on utilise la formule d'Euler pour exprimer l'expression trigonométrique à l'aide de l'exponentielle complexe ;
2. on développe la puissance grâce à la formule du binôme de Newton ;
3. on utilise les propriétés de l'exponentielle puis on regroupe les termes « qui se ressemblent » ;
4. on utilise Euler faire apparaître des expressions trigonométriques à la place des exponentielles complexes.

Exemple : Pour $x \in \mathbb{R}$, linéarisons $\cos^3 x$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \cos(x)^3 = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x}$.

Remarque : L'expression initiale est réelle donc il ne doit plus rester de partie imaginaire non nulle à la fin.

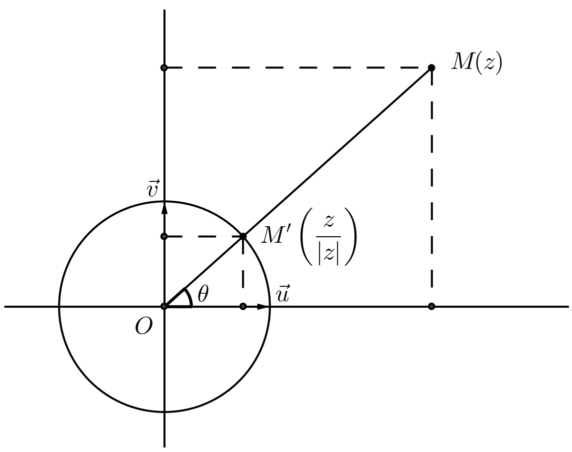
On peut faire le "contraire". Par exemple, exprimons $\sin(3x)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et $\sin x$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(3x) = \mathrm{Im}(e^{3ix}) = \mathrm{Im}\left((e^{ix})^3\right) = \mathrm{Im}\left((\cos x + i\sin x)^3\right)$.

Après calculs, il vient : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(3x) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3(x)}$.

2 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Théorème
Soit z un complexe non nul.
z peut être écrit de façon unique sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\pi[$.
Cette expression est la **forme exponentielle** du complexe z.
On a alors : $r = |z|$ et $\theta = \mathrm{Arg}(z)$.

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Le complexe $\frac{z}{|z|}$ a pour module 1. Donc, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \iff z = |z|e^{i\theta}$.
Graphiquement :



Ceci prouve l'existence de la forme exponentielle.

L'unicité tient à l'unicité du module ainsi qu'à l'unicité de l'argument principal. ■

Remarque : en pratique, si r, ρ, θ et ϕ sont des réels (avec r et ρ strictement positifs) alors

$$\boxed{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \iff \begin{cases} \rho = r \\ \theta = \phi + k2\pi \text{ (avec un certain } k \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$$

Cela signifie que deux complexes z et z' sont égaux si, et seulement si, leurs modules et leurs arguments principaux sont égaux.

Méthode

Pour trouver la forme exponentielle d'un complexe non nul z dont on a la forme algébrique et dont l'argument n'est pas évident :

1. on calcule le module de z ;
2. on factorise la forme algébrique de z par $|z|$;
3. on identifie $\cos\theta$ et $\sin\theta$ (avec $\theta = \mathrm{Arg}(z)$) ;
4. si θ est un angle remarquable on donne sa valeur, sinon on l'exprime en fonction de Arccos (ou Arcsin). **Attention :** on n'a pas toujours $\theta = \mathrm{Arccos}(\cos\theta)$! Il faut regarder dans quel quadrant se trouve $M(z)$.
5. La forme exponentielle de z est $|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Exemples :

1. Donner la forme exponentielle de $1 + \mathrm{i}$.
2. Donner la forme exponentielle de $z = \sqrt{3}\mathrm{i} - 1$.
3. Donner la forme exponentielle de $z = -3 - 7\mathrm{i}$.

Remarque : l'écriture intermédiaire $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est la **forme trigonométrique** de z.

Proposition

(Propriétés des arguments)

Soit z et z' deux complexes non nuls. On a :

i. $\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) =$ ii. $\mathrm{Arg}(zz') =$ iii. $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) =$

Démonstration

Pour chaque point, il s'agit d'exploiter l'unicité de la forme exponentielle d'un complexe. Par exemple pour i. :

Remarque : il y a une (petite) erreur dans l'énoncé de la propriété. En effet,

Méthode

Technique de l'**angle moitié** pour factoriser $\cos a \pm \cos b$ (ou $\sin a \pm \sin b$) :

1. on écrit la quantité étudiée comme la partie réelle (ou imaginaire) d'une somme d'exponentielles complexes ;
2. on fait intervenir l'angle moitié $\frac{a+b}{2}$ et on écrit $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$;
3. on factorise par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$;
4. on utilise la formule d'Euler pour la parenthèse ;
5. on conclut.

Exemple : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Transformons $\cos a + \cos b$ avec la technique de l'angle moitié.

3 Racines n-ièmes de l'unité

Définition

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **racine n-ième de l'unité** les solutions de l'équation $z^n = 1$.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité.

De plus, si on note $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, ces racines sont : $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots, \alpha^{n-1}$.

Démonstration
On travaille avec la forme exponentielle : soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$.

Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme des racines n-èmes de l'unité vaut

Démonstration
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. On a :

Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le plan complexe, les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygône régulier à n côtés inscrits dans le cercle trigonométrique.

Démonstration
Il suffit de

Retour sur les équations du second degré : la difficulté principale dans la résolution d'une équation du second degré est le calcul d'une racine carrée du discriminant en utilisant la forme algébrique. C'est beaucoup plus facile si on utilise la forme exponentielle.

Par exemple, trouvons une racine carrée de $\Delta = 7\mathrm{e}^{0,3\mathrm{i}}$.

Remarque : toute manipulation des complexes avec des produits (et donc des puissances ou des quotients) sera beaucoup plus simple avec la forme exponentielle qu'avec la forme algébrique. Au contraire, si on doit faire des sommes (ou des différences), la forme algébrique est plus simple à manipuler que la forme exponentielle.

4 Exponentielle complexe

Remarque : nous disposons de deux exponentielles : e^x et e^{ix} pour $x \in \mathbb{R}$. Dans les paragraphes précédents, on a parlé d'*exponentielle complexe* alors qu'on n'a pas encore donné de sens à e^z pour $z \in \mathbb{C}\backslash(\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$.

Définition
Soit $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On définit l'exponentielle de z de la façon suivante :

Proposition
Soit z et z' deux complexes.

i. $e^{z+z'} =$; ii. $e^z = e^{z'} \Longleftrightarrow$

Démonstration
On ne traite que ii. :

5 Nombres complexes et géométrie

5.1 Repérage du plan

Soit $M(z)$ un point du plan complexe. M est parfaitement défini par z, qui peut être connu sous plusieurs formes : algébrique ou exponentielle. Ces deux formes du nombre complexe z correspondent à deux systèmes de coordonnées du point M.

Définition
Soit $M(z)$ un point du plan complexe.

- Le couple $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ constitue les **coordonnées cartésiennes** de M.
- Le couple $(|z|, \mathrm{Arg}(z))$ constitue les **coordonnées polaires** de M.

Remarque : Il y a un problème dans la définition. En effet,

5.2 Retour sur l'affixe complexe d'un vecteur, applications.

Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan. On définit l'affixe de $\vec{w}$ comme étant l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$.

M est unique donc $\vec{w}$ est parfaitement défini par son affixe complexe.

Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points, $\boxed{\text{l'affixe de } \overrightarrow{AB} \text{ est } b - a}$.

(Il s'agit juste d'appliquer la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ ce qui, du point de vue des affixes complexes correspond à $-a+b$).

Proposition
Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan, soit z_w son affixe complexe.

i. $|z_w| = \|\overrightarrow{w}\|$ ii. $\text{Arg}(z_w)$ est une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$

Proposition
Soit $\overrightarrow{w}(z_w)$ et $\overrightarrow{q}(z_q)$ deux vecteurs non nuls. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{q})$ est $\text{Arg}\left(\frac{z_q}{z_w}\right)$.

Démonstration
$\frac{z_q}{z_w}$ existe car les vecteurs sont non nuls (ce qui implique $z_w \neq 0$).
On a, d'après les propriétés de l'argument : $\text{Arg}(\frac{z_q}{z_w}) = \text{Arg}(z_q) - \text{Arg}(z_w)$ (à 2π près).
C'est donc une mesure de

$$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{q}) - (\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{q}) + (\overrightarrow{w};\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{w};\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u};\overrightarrow{q}) = (\overrightarrow{w};\overrightarrow{q})$$

Ce qui prouve le résultat annoncé. ■

Ce dernier résultat a deux applications très utiles :

Proposition
(Caractériser l'alignement à l'aide des complexes)
Soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan. Soit $Z = \frac{b-a}{c-a}$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. les points A, B et C sont alignés ;
ii. $\text{Arg}(Z) \in \{0; \pi\}$.
iii. Z est réel ;
iv. $\text{Im}(Z) = 0$.

Démonstration
Il suffit d'utiliser la propriété précédente avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. ■

Proposition
(Caractériser l'orthogonalité à l'aide des complexes)
Soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan. Soit $Z = \frac{b-a}{c-a}$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. les triangle ABC est rectangle en A ;
ii.
iii.
iv.

5.3 Transformations du plan

On note $\mathcal{P}$ le plan complexe.

Définition
Une **transformation du plan** est

Proposition
Soit $\overrightarrow{q}(z_q)$ un vecteur du plan.
La translation de vecteur $\overrightarrow{q}$ est l'application : $M(z) \longmapsto M'($ $)$.

Démonstration
Soit $M(z)$ et M' son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{q}$.

On a :

Définition
Soit A un point du plan, k un réel non nul.
L'**homothétie de centre** A **et de rapport** k est la transformation du plan qui, à tout point M associe l'unique point M' vérifiant $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.

Proposition
Soit $A(z_A)$ un point du plan complexe, k un réel non nul.
L'homothétie de centre A et de rapport k est la transformation : $M(z) \longmapsto M'($ $)$.

Démonstration
Soit $M(z)$ et M' son image par l'homothétie de centre A et de rapport k

On a :

Remarques :

a) une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ multiplie les longueurs par et les surfaces par .
b) une symétrie centrale de centre A est une homothétie dont le centre est A et dont le rapport est

Proposition
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre O est l'application du plan complexe $M(z) \longmapsto M'($ $)$.