Chapitre 4 : compléments sur les complexes

Notations : dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Géométrie dans le plan complexe

1.1 Repérage du plan

Soit $M(z)$ un point du plan complexe. M est parfaitement défini par z, qui peut être connu sous plusieurs formes : algébrique ou exponentielle. Ces deux formes du nombre complexe z correspondent à deux systèmes de coordonnées du point M.

Définition
Soit $M(z)$ un point du plan complexe.

- Le couple $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ constitue les **coordonnées cartésiennes** de M.
- Le couple $(|z|, \mathrm{Arg}(z))$ constitue les **coordonnées polaires** de M.

Remarques :

a) Il y a un problème dans la définition. En effet,

b) Le fait qu'on choisisse l'argument principal (implicite avec la notation $\mathrm{Arg}(z)$) donne l'unicité de la forme exponentielle d'un complexe non nul et donc l'unicité des coordonnées polaires pour les points du plan différents de l'origine.

1.2 Retour sur l'affixe complexe d'un vecteur, applications.

Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan. On définit l'affixe de $\vec{w}$ comme étant l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$.

M est unique donc $\vec{w}$ est parfaitement défini par son affixe complexe.

Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points, $\boxed{\text{l'affixe de } \overrightarrow{AB} \text{ est } b - a}$.

(Il s'agit juste d'appliquer la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ ce qui, du point de vue des affixes complexes correspond à $-a + b$).

Proposition
Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan, soit z_w son affixe complexe.

i. $|z_w| = \|\vec{w}\|$ ii. $\mathrm{Arg}(z_w)$ est une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$

Proposition
Soit $\vec{w}(z_w)$ et $\vec{q}(z_q)$ deux vecteurs non nuls. Une mesure de l'angle $(\vec{w}, \vec{q})$ est $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_q}{z_w}\right)$.

Démonstration
$\frac{z_q}{z_w}$ existe car les vecteurs sont non nuls (ce qui implique $z_w \neq 0$).
On a, d'après les propriétés de l'argument : $\mathrm{Arg}(\frac{z_q}{z_w}) = \mathrm{Arg}(z_q) - \mathrm{Arg}(z_w)$ (à 2π près).
C'est donc une mesure de

$$(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{q}) - (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{q}) + (\overrightarrow{w}; \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{w}; \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{q}) = (\overrightarrow{w}; \overrightarrow{q})$$

Ce qui prouve le résultat annoncé. ■

Ce dernier résultat a deux applications très utiles :

Proposition (Caractériser l'alignement à l'aide des complexes)
Soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan. Soit $Z = \frac{b-a}{c-a}$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. les points A, B et C sont alignés ;
ii. $\mathrm{Arg}(Z) \in \{0; \pi\}$.
iii. Z est réel ;
iv. $\mathrm{Im}(Z) = 0$.

Démonstration
Il suffit d'utiliser la propriété précédente avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. ■

Proposition (Caractériser l'orthogonalité à l'aide des complexes)
Soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan. Soit $Z = \frac{b-a}{c-a}$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. les triangle ABC est rectangle en A ;
ii.
iii.
iv.

Méthode (Comment se servir des deux propositions précédentes)
Pour déduire i. par équivalence, **on a le choix** entre ii, iii et iv.

Exercice
Soit $M(z)$ un point du plan complexe, on considère également $N(z^2)$ et $P(z^3)$.
Trouver le lieu géométrique de M tel que MNP soit rectangle.

Réponse
On commence par exclure $z \in \{0; 1; -1\}$ car

1.3 Transformations du plan

On note $\mathcal{P}$ le plan complexe.

Définition
Une **transformation du plan** est

Proposition (Formulation complexe des translations)
Soit $\overrightarrow{q}(z_q)$ un vecteur du plan.
La translation de vecteur $\overrightarrow{q}$ est l'application : $M(z) \longmapsto M'(\qquad\qquad\qquad)$.

Démonstration
Soit $M(z)$ et $M'(z')$ son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{q}$.

On a :

Définition
Soit A un point du plan, k un réel non nul.
L'**homothétie de centre** A **et de rapport** k est la transformation du plan qui, à tout point M associe l'unique point M' vérifiant $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.

Proposition (Formulation complexe d'une homothétie du plan)
Soit $A(a)$ un point du plan complexe, k un réel non nul.
L'homothétie de centre A et de rapport k est la transformation : $M(z) \longmapsto M'(\quad\quad\quad\quad)$.

Démonstration
Soit $M(z)$ et $M'(z')$ son image par l'homothétie de centre A et de rapport k

On a :

Remarques :

a) une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ multiplie les longueurs par $\quad\quad$ et les surfaces par $\quad\quad$.

b) une symétrie centrale de centre A est une homothétie dont le centre est A et dont le rapport est

Proposition (Formulation complexe des rotations de centre O)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre O et d'angle θ est l'application $M(z) \longmapsto M'(\quad\quad\quad)$.

Exercice
Interpréter géométriquement l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (1+\mathrm{i})z \end{array} \right.$.

Réponse
On considère la transformation $M(z) \mapsto M'(f(z))$. On a :

2 Equations du second degré

2.1 Racines carrées complexes

Proposition
Soit a un nombre complexe non nul.
L'équation $z^2 = a$ admet exactement deux solutions complexes, opposées l'une de l'autre.
Ces deux nombres sont appelés **racines carrées** de a.

Démonstration
Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $a =$

On a alors $z^2 = a \iff$

Finalement, ∎

Exemple : déterminons les racines carrées de $a = 3 - 5\mathrm{i}$.

Remarques :

a) 0 a une seule racine carrée.

b) **ATTENTION : Le symbole radical ($\sqrt{\ }$) est réservé pour les réels positifs.**

c) On peut également travailler avec la forme algébrique. Reprenons le calcul des racines de $a = 3 - 5\mathrm{i}$:

d) En particulier, les nombres réels ont des racines carrées simples à trouver. Par exemple :

— les racines carrées de 7 :

— les racines carrées de -12 :

2.2 Résolution des équations du second degré

Théorème
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une ou deux solutions.
Plus précisément, en notant $\Delta = b^2 - 4ac$ et en prenant δ une racine carrée de Δ les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont :

Remarques :

a) on a pris $a \in \mathbb{C}^*$ pour

b) Puisque tout complexe admet au moins une racine carrée, on a le droit d'en choisir une de Δ.

c) Si $\Delta = 0$ alors

Démonstration
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, notons $(E) : az^2 + bz + c = 0$. On a :

Remarque : dans le cas particulier où les coefficients sont réels alors

2.3 Somme et produit des racines

Proposition
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, soit z_1 et z_2 les solutions (éventuellement identiques) de $az^2 + bz + c = 0$.

On a : $z_1 + z_2 =$ et $z_1 z_2 =$

Démonstration
Il suffit de

Proposition
Soit a et b des complexes. Les solutions du système $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ sont les racines (éventuellement égales) de $X^2 - aX + b$.

Démonstration
Cela provient du développement de $(X - x)(X - y) = X^2 - (x + y)X + xy$. ■

3 Racines n-ièmes de l'unité

Définition
Soit n un entier naturel non nul.
On appelle **racine n-ième de l'unité** les solutions de l'équation $z^n = 1$.

Théorème
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité.
De plus, si on note $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, ces racines sont : $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots, \alpha^{n-1}$.

Démonstration
On travaille avec la forme

Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le plan complexe, les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygône régulier à n côtés inscrits dans le cercle trigonométrique.

Démonstration
Il suffit de

Exemples : pour $n \in [\![2;5]\!]$, déterminons les racines $n-$ièmes de 1.

Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme des racines n-èmes de l'unité vaut

Démonstration
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. On a :

Méthode (Trouver les racines $n-$ièmes d'un complexe a)
Pour résoudre $z^n = a$, on peut adopter deux stratégies :
- Version 1 : on procède comme dans le cours et on résout l'équation $z^n = a$.
- Version 2 : si z_0 est une solution de $z^n = a$, les autres sont obtenues en multipliant z_0 par les racines $n-$ièmes de 1. Autrement dit : $z_0 \times \alpha^k$ pour $k \in [\![1;n]\!]$ (avec $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$).

Exercice
Résoudre $z^4 = 5 - 5\mathrm{i}$.

Réponse
On choisit la Version

4 Fonctions avec des complexes

4.1 Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes

Définition
Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$.

i. On appelle **partie réelle** de f la fonction $\mathrm{Re}(f) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \right.$.

ii. On appelle **partie imaginaire** de f la fonction $\mathrm{Im}(f) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{Im}(f(x)) \end{array} \right.$.

iii. On dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ lorsque $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
On dit alors que la **dérivée** de f est la fonction $f' = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(f)$.

Exercice
Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f(x) = (1 + 3\mathrm{i}) \ln x - (5 - 2\mathrm{i})x^5$.

4.2 Exponentielle complexe

Remarque : nous disposons de deux exponentielles : e^x et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Dans les paragraphes précédents, on a parlé d'*exponentielle complexe* alors qu'on n'a pas encore donné de sens à e^z pour $z \in \mathbb{C} \backslash (\mathbb{R} \cup \mathrm{i}\mathbb{R})$.

Définition
Soit $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On définit l'exponentielle de z de la façon suivante :

Proposition
Soit z et z' deux complexes.

i. $\mathrm{e}^{z+z'} =$; ii. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \Longleftrightarrow$

Démonstration
On ne traite que ii. :

Exercice
Résoudre $\mathrm{e}^z = 3\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$.