Chapitre 8 : Equations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants

Objectif :

avec et $g : I_{\text{intervalle}} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

L'inconnue

1 Résolution de l'équation homogène (E_h) :

Définition
On appelle *équation caractéristique* associée à (E_h) l'équation du second degré $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$.

Remarque : on a bien une équation du second degré car

Exemples :

.

Équation différentielle	Équation homogène	Équation caractéristique
$y'' + 4y' - 5y = \mathrm{e}^x$		
$5y'' - 3y' = t^2 + 1$		
		$2r^2 - 6r + 7 = 0$

Théorème (Solution de l'équation homogène $(E_h) : ay'' + by' + cy = 0$)
On a plusieurs cas, selon l'équation caractéristique $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$.

- Si (E_c) a **deux racines réelles** r_1 et r_2 alors $t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}$ sont solutions de (E_h) et l'ensemble des solutions de E_h est :

- Si (E_c) a **une racine double** r alors $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ et $t \mapsto t\mathrm{e}^{rt}$ sont solutions de (E_h) et l'ensemble des solutions de E_h est :

- Si (E_c) a **deux racines complexes conjuguées** $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ alors $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$ sont solutions de (E_h) et l'ensemble des solutions de E_h est :

Remarques :

1. Dans le dernier cas, on peut transformer l'expression trigonométrique :

   $\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t) =$

   L'ensemble des solutions de (E_h) peut donc s'écrire :

2. Dans chaque cas, on a une infinité de solutions qui dépend de deux paramètres. Pour fixer leurs valeurs dans les exercices, il y aura donc deux conditions (souvent initiales).
3. Dans chaque cas, on a des c _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ l _ _ _ _ _ _ _ _ _ de deux fonctions.

   L'ensemble des combinaisons linéaires réelles de deux fonctions f et g est $\{\lambda f + \mu g \ / \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ que l'on note également $\mathrm{Vect}(f, g)$.

Exemples : Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes.

a) $(E_1) : y'' + 3y' + 2y = 0$

b) $(E_2) : y'' - 2y' + y = 0$

c) $(E_3) : y'' - y' + y = 0$

d) $(E_4) : y'' = \omega^2 y$, où ω est un réel.

e) $(E_5) : y'' = -\omega^2 y$, où ω est un réel.

En physique, on dit qu'on a un *oscillateur harmonique*, ω est la *pulsation* du système.

2 Résolution de (E)

Théorème (Solution générale de l'équation complète)
Soit f une solution particulière de (E).
Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f + g$ avec g qui est solution de (E_h).

Méthode
Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

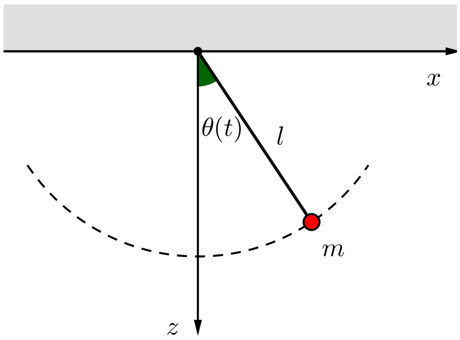
- étape 1 : résolution de l'équation homogène (une infinité de fonctions) ;
- étape 2 : recherche d'une solution particulière pour l'équation complète (une fonction f) ;
- étape 3 : résolution de l'équation complète (f+solutions de E_h) ;
- étape 4 : trouver **la** solution de (E) qui vérifie les conditions (problème de Cauchy).

Exemple : Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + y' = \mathrm{e}^{2t} \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1 \end{cases}$

3 Exemple de référence

On considère une masse $m = 1$kg accrochée au bout d'un fil de longueur $l = 1$m.

Au temps $t = 0$, on lache le pendule ainsi constitué depuis un angle de 30^o et on observe un mouvement oscillant.



Si on néglige les frottements, en appliquant la conservation de l'énergie mécanique du système on a l'équation : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$.

Si le pendule est soumis à un frottement visqueux de coefficient k, l'équation devient : $\ddot{\theta} + \dfrac{k}{ml}\dot{\theta} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$.

Dans chaque cas, déterminer $\theta(t)$.

Cas sans frottements :

Cas avec frottements :

4 Ce qui manque dans ce poly de maths :